

1. 원 $x^2 + y^2 = 6$ 에 접하고 기울기가 2인 접선의 방정식을 구하면?

① $y = 2x \pm \sqrt{10}$

② $y = 2x \pm 3\sqrt{2}$

③ $y = 2x \pm 2\sqrt{5}$

④ $y = 2x \pm 2\sqrt{6}$

⑤ $y = 2x \pm \sqrt{30}$

해설

기울기가 2 인 직선의 방정식은

$y = 2x + k$ 직선이 원에 접하므로 직선과 원의
중심 사이 거리는 반지름과 같다.

$$\therefore \frac{|2 \times 0 + (-1) \times 0 + k|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \sqrt{6}$$

$$\Rightarrow |k| = \sqrt{30}$$

$$\Rightarrow k = \pm \sqrt{30}$$

$$\therefore \text{접선의 방정식은 } y = 2x \pm \sqrt{30}$$

2. 원 $x^2 + y^2 - 4x - 2y = a - 3$ 이 x 축과 만나고, y 축과 만나지 않도록 하는 실수 a 의 값의 범위는?

① $a > -2$

② $a \geq -1$

③ $-1 \leq a < 2$

④ $-2 < a \leq 2$

⑤ $-2 \leq a < 3$

해설

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y = a - 3$$

$$\Rightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 = a+2$$

중심이 $(2, 1)$ 이고, 반지름이 $\sqrt{a+2}$ 인 원이다.

x 축과 만나려면 $\sqrt{a+2} \geq 1 \cdots \textcircled{1}$

y 축과 만나지 않으려면 $0 < \sqrt{a+2} < 2 \cdots \textcircled{2}$

①, ②를 동시에 만족하므로

$$\therefore -1 \leq a < 2$$

3. 점 $A(0, a)$ 에서 원 $x^2 + (y-2)^2 = 9$ 에 그은 두 접선이 수직이 되도록 하는 a 의 값들의 합을 구하면?

① -1

② $-\sqrt{2}$

③ 2

④ $3\sqrt{2}$

⑤ 4

해설

접선의 기울기를 m 이라 하면 접선의 방정식은

$y = mx + a$ 이다. 원의 중심 $(0, 2)$ 에서 직선 $mx - y + a = 0$ 에

이르는 거리가 반지름의 길이와 같으므로 $\frac{|m \times 0 - 2 + a|}{\sqrt{m^2 + 1^2}} = 3$

$\therefore |a - 2| = 3\sqrt{m^2 + 1}$ 양변을 제곱하여 정리하면 $9m^2 - (a^2 - 4a - 5) = 0$ 이 방정식의 두 근을 m_1, m_2 라 하면 두 접선이 서로 수직이므로

$$m_1 m_2 = -\frac{1}{9}(a^2 - 4a - 5) = -1, a^2 - 4a - 14 = 0$$

$$\therefore a = 2 \pm 3\sqrt{2}$$

따라서, 구하는 a 의 값들의 합은

$$(2 + 3\sqrt{2}) + (2 - 3\sqrt{2}) = 4$$

4. 원 $x^2 + y^2 = 5$ 와 점 $P(x_1, y_1)$ 에서 접하는 직선이 x 축, y 축과 만나는 점을 각각 A, B 라고 할 때, $\triangle OAB$ 의 넓이의 최솟값을 구하여라. (단, P 는 제1 사분면 위의 점이고, O 는 원점이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$x_1 y_1 > 0$ 이고 넓이는 $\frac{25}{2x_1 y_1}$ 이므로

$x_1 y_1$ 이 최대가 될 때 넓이는 최소가 된다.

그런데 $x_1^2 + y_1^2 = 5$ 이고 $x_1 > 0, y_1 > 0$ 이므로

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{x_1^2 + y_1^2}{2} \geq \sqrt{x_1^2 \cdot y_1^2} = x_1 y_1, \quad x_1 y_1 \leq \frac{5}{2}$$

$$\therefore \frac{1}{x_1 y_1} \geq \frac{2}{5}$$

$$\therefore \frac{25}{2x_1 y_1} \geq \frac{25}{2} \cdot \frac{2}{5} = 5 \quad (\text{단, 등호는 } x_1 = y_1 \text{ 일 때 성립})$$

따라서, 구하는 넓이의 최솟값은 5

5. 점 A(2, 2)에서 원 $x^2 + y^2 = 1$ 에 그은 두 접선의 기울기를 α, β 라 할 때, $\alpha\beta$ 의 값은 ?

① $\frac{8}{3}$

② $-\frac{8}{3}$

③ 1

④ -1

⑤ 0

해설

점 (2, 2)를 지나고 기울기 m 인 접선을

$$y - 2 = m(x - 2) \text{ 즉, } mx - y - 2m + 2 = 0$$

이라고 하면

원의 중심 (0, 0)에서 접선까지 거리는

원의 반지름 1과 같아야 한다.

$$\text{따라서 } 1 = \frac{|-2m + 2|}{\sqrt{m^2 + 1}},$$

$$|-2m + 2| = \sqrt{m^2 + 1}$$

양변을 제곱하여 정리하면 $3m^2 - 8m + 3 = 0$

따라서 두 기울기의 곱은 근과 계수와의 관계에 의하여 1이다.