

1. 두 복소수 $z_1 = 1 + (a-2)i$, $z_2 = (b-2) - ai$ 에 대하여 $z_1 + (2-4i) = z_2$ 가 성립할 때, 실수 a , b 의 합 $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $a+b=8$

해설

$z_1 = 1 + (a-2)i$, $z_2 = (b-2) - ai$ 를
 $z_1 + (2-4i) = z_2$ 에 대입하면
 $1 + (a-2)i + (2-4i) = (b-2) - ai$
 $3 + (a-6)i = (b-2) - ai$
복소수가 서로 같을 조건에 의하여
 $3 = b-2$, $a-6 = -a$
위의 두 식을 연립하여 풀면
 $b = 5$, $a = 3$
 $\therefore a+b = 8$

2. 복소수 $(1+i)x^2 - (1-4i)x - (2-3i)$ 가 실수일 때의 x 값과 순허수일 때의 x 값을 모두 곱한 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 6

해설

준식을 전개하여 실수부와 허수부로 정리하면

$$(x^2 - x - 2) + (x^2 + 4x + 3)i$$

실수가 되기 위해서는 $x^2 + 4x + 3 = 0$

$$(x+1)(x+3) = 0 \therefore x = -3, -1$$

순허수가 되기 위해서는

$$x^2 - x - 2 = 0 \text{이고 } x^2 + 4x + 3 \neq 0$$

$$x = -1, 2 \text{이고 } x \neq -3, -1 \therefore x = 2$$

$$(-3) \times (-1) \times 2 = 6$$

3. 다음 계산을 하시오.

$$1 + \frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} + \cdots + \frac{1}{i^{2006}}$$

▶ 답:

▷ 정답: $-i$

해설

$i^4 = 1$ 이므로

$$\frac{1}{i} + \frac{1^2}{i} + \frac{1^3}{i} + \frac{1^4}{i}$$

$$= \frac{1^5}{i} + \frac{1^6}{i} + \frac{1^7}{i} + \frac{1^8}{i} \cdots$$

$$= \frac{1}{i} + \frac{1^2}{i} + \frac{1^3}{i} + \frac{1^4}{i}$$

$$= -i - 1 + i + 1 = 0$$

$$\therefore (\text{준식}) = 1 + (0 + 0 + \cdots + 0) + \frac{1}{i} + \frac{1^2}{i}$$

$$= 1 - i - 1 = -i$$

4. $z^2 = \sqrt{5} + i$ 를 만족하는 복소수 z 에 대하여 $z\bar{z}$ 의 값은? (단, \bar{z} 는 z 의 켤레복소수)

- ① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 2 ④ $\sqrt{5}$ ⑤ $\sqrt{6}$

해설

$$\begin{aligned} z &= x + yi \quad (x, y \text{ 는 실수}) \text{로 놓으면 } (x + yi)^2 = \sqrt{5} + i \\ x^2 - y^2 + 2xyi &= \sqrt{5} + i \text{ 에서 복소수가 서로 같을 조건에 의하여} \\ x^2 - y^2 &= \sqrt{5}, \quad 2xy = 1 \\ z\bar{z} &= (x + yi)(x - yi) = x^2 + y^2 \text{ 이므로} \\ (x^2 + y^2)^2 &= (x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2 = (\sqrt{5})^2 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 6 \\ x^2 + y^2 > 0 \text{ 이므로 } x^2 + y^2 &= \sqrt{6} \\ \therefore z\bar{z} &= \sqrt{6} \end{aligned}$$

해설

$$\begin{aligned} z^2 &= \sqrt{5} + i, \quad \bar{z}^2 = \sqrt{5} - i \\ z^2\bar{z}^2 &= (\sqrt{5} + i)(\sqrt{5} - i) = 6 \\ z\bar{z} &= \pm\sqrt{6} \\ z\bar{z} \geq 0 \text{ 이므로 } z\bar{z} &= \sqrt{6} \end{aligned}$$

5. $\alpha = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $\alpha^3 + 2\alpha^2 + 2\alpha + 5$ 의 값을 구하면?

- ① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \\ 2\alpha &= -1 + \sqrt{3}i \\ 2\alpha + 1 &= \sqrt{3}i \\ \text{양변을 제곱하여 정리하면} \\ \alpha^2 + \alpha + 1 &= 0 \\ \alpha^3 + 2\alpha^2 + 2\alpha + 5 & \\ &= \alpha(\alpha^2 + \alpha + 1) + (\alpha^2 + \alpha + 1) + 4 \\ &= 4\end{aligned}$$

해설

$$\begin{aligned}\alpha^2 + \alpha + 1 = 0 \text{ 을 얻은 후 } \alpha^3 + 2\alpha^2 + 2\alpha + 5 \text{ 를 } \alpha^2 + \alpha + 1 \text{ 로} \\ \text{나누면} \\ \alpha^3 + 2\alpha^2 + 2\alpha + 5 & \\ &= (\alpha^2 + \alpha + 1)(\alpha + 1) + 4 \\ &= 4 (\because \alpha^2 + \alpha + 1 = 0)\end{aligned}$$