1. 중심이 $(2, -1)$ 이고, 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$ 인 원의 방정식은?

① $(x+2)^2+(y-1)^2=5$
② $(x+2)^2+(y-1)^2=\sqrt{5}$
③ $(x-2)^2+(y+1)^2=5$
④ $(x-2)^2+(y+1)^2=\sqrt{5}$
⑤ $(x-2)^2+(y+1)^2=5^2$

해설

중심이 $(2, -1)$, $r : \sqrt{5}$ 인 원
$\Rightarrow$ $(x-2)^2+(y+1)^2=5$

2. 원 $x^2+y^2-10x-2y+1=0$의 중심의 좌표를 $(a,\ b)$ 반지름의 길이를 r라 할 때, $a+b+r$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 11

해설
주어진 원의 방정식을 표준형으로 고치면
$(x^2-10x+25)+(y^2-2y+1)=25$
$\therefore (x-5)^2+(y-1)^2=5^2$
따라서 중심의 좌표는 $(a,\ b)=(5,\ 1)$
반지름의 길이는 $r=5$이므로
$a+b+r=5+1+5=11$

3. 원 $x^2+y^2+4x-2y+1=0$ 의 반지름의 길이는?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$x^2+y^2+4x-2y+1=0$

$\Rightarrow (x+2)^2+(y-1)^2=4=2^2$

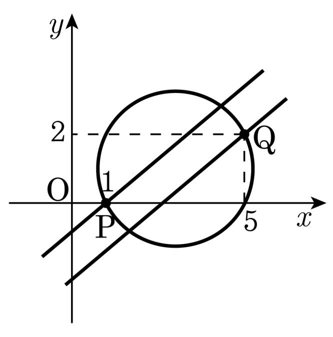
4. 방정식 $x^2+y^2+2x=0$ 이 나타내는 도형의 넓이를 구하면?

① 3π ② 2π ③ π ④ $\frac{1}{2}\pi$ ⑤ $\frac{1}{3}\pi$

해설

(준식) : $(x+1)^2+y^2=1$
중심 $(-1,\ 0)$, 반지름의 길이가 1 인 원이므로 넓이는 π

5. 다음 그림과 같이 좌표평면에서 평행한 두 직선에 의해 원의 넓이가 3등분되었다. 원과 직선의 교점 P, Q의 좌표가 각각 $(1,0)$, $(5,2)$이고, 원의 반지름의 길이가 r일 때, r^2의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

평행한 두 직선에 의하여 원의 넓이가 3등분되었으므로
그림에서 두 점 P, Q는 원의 지름의 양 끝점이다.
따라서 구하는 원의 중심은 $\overline{\mathrm{PQ}}$의 중점 C(3, 1)이므로,
$r^2 = \overline{\mathrm{PC}}^2 = (3-1)^2 + (1-0)^2 = 5$ 이다.

6. 점 $(a, 1)$ 을 중심으로 하고 점 $(0, -3)$ 을 지나는 원의 반지름의 길이가 5 일 때, 양수 a 의 값은?

① 2 ② $2\sqrt{2}$ ③ 3 ④ $2\sqrt{3}$ ⑤ 4

해설

점 $(a, 1)$ 을 중심으로 하고 반지름의 길이가 5 인
원의 방정식은 $\therefore (x-a)^2 + (y-1)^2 = 5^2$
이 점$(0, -3)$ 을 지나므로 $(0-a)^2 + (-3-1)^2 = 25$
$a^2 = 9 \quad \therefore a = 3, (\because a > 0)$

7. 두 점 A(1, 2), B(−1, 4)를 지름의 양 끝점으로 하는 원의 방정식은?

① $(x-1)^2+(y-4)^2=4$ ② $(x+1)^2+(y-2)^2=8$

③ $(x-1)^2+(y-2)^2=4$ ④ $x^2+(y-3)^2=2$

⑤ $x^2+y^2=2$

해설

원의 중심 : $\left(\frac{1+(-1)}{2},\ \frac{2+4}{2}\right)=(0,\ 3)$

반지름 : $\frac{\sqrt{2^2+2^2}}{2}$

∴ 원의 방정식 : $x^2+(y-3)^2=(\sqrt{2})^2$

8. 세 점 $(-1,\ 1)$, $(2,\ 2)$, $(6,\ 0)$을 지나는 원의 중심의 좌표는?

① $(2, 3)$　② $(-2, 3)$　③ $(2, -3)$
④ $(-2, -3)$　⑤ $\left(2, \frac{3}{2}\right)$

해설

세 점 $(-1,\ 1)$, $(2,\ 2)$, $(6,\ 0)$을 지나는 원의 방정식을
$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ 이라 하면
이 원이 세점을 지나므로
$(-1)^2 + 1^2 - a + b + c = 0$
$\therefore a - b - c = 2 \cdots\cdots$ ㉠
$2^2 + 2^2 + 2a + 2b + c = 0$
$\therefore 2a + 2b + c = -8 \cdots\cdots$ ㉡
$6^2 + 6a + c = 0$
$\therefore 6a + c = -36 \cdots\cdots$ ㉢
㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면
$a = -4,\ b = 6,\ c = -12$
즉, $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$ 이므로
표준형으로 나타내면
$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 25$
따라서, 원의 중심의 좌표는 $(2,\ -3)$ 이다.

9. $x^2+y^2+x-y+k=0$ 의 그래프가 원을 나타내도록 하는 상수 k 의 값의 범위는?

① $k \le \frac{1}{2}$ ② $k < \frac{1}{2}$ ③ $k > \frac{1}{2}$ ④ $k \ge \frac{1}{2}$ ⑤ $k < \frac{1}{3}$

해설

주어진 방정식을 정리하면,

$\Rightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}-k$

$\therefore$ 원이 되려면, $\frac{1}{2}-k>0 \rightarrow k<\frac{1}{2}$

10. 이차방정식 $x^2 - ay^2 - 4x + 2y + k = 0$ 이 원을 나타낼 때 두 괄호에 들어갈 알맞은 값의 합을 구하여라.

$a = (\quad\quad)$, $k < (\quad\quad)$

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

원의 방정식이 되기 위해서는 x^2 의 계수와 y^2 의 계수가 같아야 하므로 $a = -1$

또한, 준식을 표준형으로 나타내면,

$x^2 - 4x + y^2 + 2y + k = 0$ 에서

$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 5 - k$

여기서, $5 - k > 0$ 이어야 하므로 $k < 5$

11. 다음 원 $x^2+y^2=9$와 직선 $y=x+5$ 의 교점의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ＿＿＿＿＿＿＿＿ 개

▷ 정답 : 0개

해설

원의 중심과 직선 사이의 거리를 구해보면,

$\frac{|5|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}>3$

반지름보다 크므로 원과 직선은 만나지 않는다.

12. 기울기가 -1 이고, 원 $x^2 + y^2 = 4$ 에 접하는 직선의 방정식은?

① $y = -x \pm 2$　② $y = -x \pm 3$　③ $y = -x \pm 4$
④ $y = -x \pm 2\sqrt{2}$　⑤ $y = -x \pm 4\sqrt{2}$

해설

구하는 직선의 기울기는 -1 이므로
$y = mx \pm r\sqrt{1 + m^2}$ 에서
$y = -x \pm 2\sqrt{1 + 1}$
$\therefore\ y = -x \pm 2\sqrt{2}$

13. 임의의 실수 a에 대하여 원 $x^2+y^2+ax+(a+2)y-(2a+4)=0$ 은 두 정점 A, B 를 지난다. 이 때 선분 AB 의 중점의 좌표를 구하면?

① $\left(\frac{1}{2},\ 1\right)$　② $\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$　③ $\left(\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}\right)$
④ $\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$　⑤ $\left(\frac{3}{2},\ \frac{1}{2}\right)$

해설

$x^2+y^2+ax+(a+2)y-(2a+4)=0$
$\Rightarrow x^2+y^2+2y-4+a(x+y-2)=0$
$\Rightarrow x^2+y^2+2y-4=0 \cdots\cdots$ ①
이고 $x+y-2=0 \cdots\cdots$ ②
② 에서 $y=-x+2$ 를 ① 에 대입하면
$x^2+(-x+2)^2+2(-x+2)-4=0$ 이를 정리하면
$2x^2-6x+4=0,\ x^2-3x+2=0$
$\therefore x=2,\ y=0$, $x=1,\ y=1$
$\therefore$ A$(2,\ 0)$, B$(1,\ 1)$
$\therefore$ A, B 의 중점의 좌표 $=\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$

14. 세 점$(-3,\ 1)$, $(5,\ 5)$, $(-2, 2)$ 를 꼭지점으로 하는 삼각형의 외접원의 중심(외심)의 좌표를 구하면?

① $(3,\ -1)$ ② $(2,\ 1)$ ③ $(4,\ 2)$
④ $(-3,\ -2)$ ⑤ $(3,\ -2)$

해설

외접원의 방정식을
$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0 \cdots$ ㉠ 이라 하면,
㉠은 $(-3,\ 1)$, $(5,\ 5)$, $(-2,\ -2)$를 지나므로

$$\begin{cases} 10 - 3A + B + C = 0 \\ 50 + 5A + 5B + C = 0 \\ 8 - 2A - 2B + C = 0 \end{cases}$$

세 식을 연립하여 풀면
$A = -4,\ \ B = -2\ ,\ C = -20$
따라서, 구하는 원은 $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$
즉, $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 25$ 이고 중심은 $(2,\ 1)$

15. 중심이 직선 $y = x$ 위에 있고, 두 점 $\mathrm{A}(1,\ -1)$, $\mathrm{B}(3,\ 5)$ 를 지나는 원의 반지름은 ?

① $\sqrt{7}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{10}$ ④ $2\sqrt{3}$ ⑤ $\sqrt{13}$

해설

중심이 직선 $y = x$ 위에 있으므로
구하는 원의 방정식의 중심을 $(a,\ a)$,
반지름을 r 라고 하면,
$(x-a)^2 + (y-a)^2 = r^2$
이것이 $\mathrm{A}(1,\ -1)$, $\mathrm{B}(3,\ 5)$ 를 지나므로
$(1-a)^2 + (-1-a)^2 = r^2 \cdots$ ①
$(3-a)^2 + (5-a)^2 = r^2 \cdots$ ②
① − ②을 하면, $16a - 32 = 0$ $\quad \therefore a = 2$
이것을 ① 에 대입하면, $r^2 = 10$
$\therefore (x-2)^2 + (y-2)^2 = 10$
$\therefore$ 원의 반지름은 $\sqrt{10}$

16. a를 임의의 실수라 하고, 원 $x^2+y^2+2ax-2ay+8a-15=0$의 넓이가 최소가 될 때, 원점에서 이 원의 중심까지의 거리는?

① 1　② $\sqrt{2}$　③ 2　④ $2\sqrt{2}$　⑤ 3

해설

원의 넓이가 최소가 되려면 반지름이 최소가 되어야 한다.

$$\begin{aligned}(x+a)^2+(y-a)^2 &= 2a^2-8a+15\\ &= 2(a-2)^2+7\\ &= (\text{반지름})^2\end{aligned}$$

따라서 $a=2$ 일 때, 반지름은 최소이고

원의 중심은 $(-a,\ a)=(-2,\ 2)$

$\therefore$ (원점에서 중심까지의 거리)

$=\sqrt{(-2)^2+2^2}=2\sqrt{2}$

17. a를 임의의 실수라 하고, 원 $x^2+y^2-2ax+2ay-4a-5=0$의 넓이가 최소가 될 때, 원점에서 이 원의 중심까지의 거리는 ?

① 1　　② $\sqrt{2}$　　③ 2　　④ $2\sqrt{2}$　　⑤ 3

해설

원의 넓이가 최소가 되려면 반지름이 최소가 되어야 한다.

$(x-a)^2+(y+a)^2 = 2a^2+4a+5$

$= 2(a+1)^2+3$

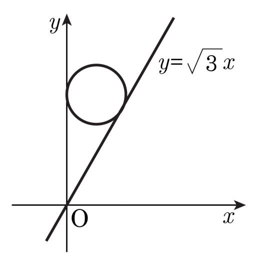
따라서 $a=-1$ 일 때, 반지름은 최소이고

원의 중심은 $(a,\ -a)=(-1,\ 1)$

$\therefore$ (원점에서 중심까지의 거리)

$= \sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{2}$

18. 다음 그림과 같이 좌표평면 위에서 중심이 1 사분면 위에 있고, 반지름의 길이가 1 인 원이 y 축과 직선 $y = \sqrt{3}x$ 에 동시에 접한다. 이 원의 중심의 좌표를 $(a,\ b)$ 라고 할 때, $a+b$ 의 값은?



① 2　　② $2+\sqrt{2}$　　③ $3+\sqrt{3}$　　④ 5　　⑤ $5+\sqrt{5}$

해설

y 축에 접하고 반지름이 1 이므로
주어진 원의 방정식은
$(x-1)^2+(y-b)^2=1$ 이라 하면
$y=\sqrt{3}x$ 가 이원에 접하므로
$(x-1)^2+(\sqrt{3}x-b)^2=1$
$x^2-2x+1+3x^2-2\sqrt{3}bx+b^2=1$
$4x^2-2(1+\sqrt{3}b)x+b^2=0$
이 방정식이 중근을 가지므로
$(1+\sqrt{3}b)^2-4b^2=0$
$3b^2+2\sqrt{3}b+1-4b^2=0,\ b^2-2\sqrt{3}b-1=0$
$\therefore b=\sqrt{3}\pm\sqrt{3+1}=\sqrt{3}\pm 2$
그런데 $b>0$ 이므로 $b=\sqrt{3}+2$
$\therefore a=1,\ b=2+\sqrt{3}$ 이므로 $a+b=3+\sqrt{3}$

19. x축과 점$(1,\ 0)$에서 접하면서 y축에 동시에 접하는 원의 넓이를 직선 $y=\dfrac{1}{3}x+b$가 이등분할 때, $6b$의 값으로 적당한 값을 찾으면?

① 2　② -3　③ 4　④ -5　⑤ 6

해설

x축과 점$(1,\ 0)$에서 접하면서 y축에 동시에 접하는 원의 방정식은$(x-1)^2+(y-1)^2=1$이다.

원의 넓이를 직선 $y=\dfrac{1}{3}x+b$가 이등분 하므로 이 직선은 원의 중심인 $(1,1)$을 지나야 한다.

따라서 $b=\dfrac{2}{3}$, $6b=4$

20. 두 점 A$(-2,\ 0)$, B$(1,\ 0)$ 으로부터의 거리의 비가 $2:1$인 점 P의 자취의 방정식은?

① $x^2+y^2=4$
② $x^2+y^2+4x=0$
③ $x^2+y^2-4x=0$
④ $x^2+y^2+4y=0$
⑤ $x^2+y^2-4y=0$

해설

점 P의 좌표를 $\mathrm{P}(x,y)$ 라 하면
$\overline{\mathrm{PA}}:\overline{\mathrm{PB}}=2:1$
즉 $4\overline{\mathrm{PB}}^2=\overline{\mathrm{PA}}^2$ 이므로
$4\left\{(x-1)^2+y^2\right\}=(x+2)^2+y^2$
$3x^2+3y^2-12x=0$
$\therefore\ x^2+y^2-4x=0$

21. 좌표평면에서 점 $C(2,3)$을 중심으로 하고, 반지름의 길이가 1인 원이 있다.
이 원 밖의 한 점 P에서 이 원에 하나의 접선을 그을 때, 그 접점을 Q, 원점을 O라 하자.
이 때, $\overline{\mathrm{OP}} = \overline{\mathrm{PQ}}$ 를 만족시키는 점 P의 자취방정식을 구하면?

① $2x+3y=6$ ② $x+y=2$ ③ $3x+2y=6$
④ $2x-3y=6$ ⑤ $3x-2y=6$

해설

점 $P(x,\ y)$와 $C(2,\ 3)$ 사이의 거리는
$\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}$, $\overline{CQ}=1$
이고, $\triangle PCQ$가 직각삼각형이므로
피타고라스정리에 의하여
$\overline{PQ} = \sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2-1}$
$\overline{OP} = \sqrt{x^2+y^2}$, $\overline{PQ}=\overline{OP}$ 이므로
$\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2-1} = \sqrt{x^2+y^2}$
$\therefore 2x+3y=6$

22. 직선 $y=2x+b$ 와 원 $x^2+y^2=4$ 이 만나지 않을 때, 상수 b 의 범위를 구하면?

① $b<-\sqrt{5}$ 또는 $b>\sqrt{5}$
② $b<-2\sqrt{5}$ 또는 $b>2\sqrt{5}$
③ $b<-3\sqrt{5}$ 또는 $b>3\sqrt{5}$
④ $b<-4\sqrt{5}$ 또는 $b>4\sqrt{5}$
⑤ $b<-5\sqrt{5}$ 또는 $b>5\sqrt{5}$

해설

원과 직선의 방정식을 연립하여 얻은 이차방정식
$5x^2+4bx+b^2-4=0 \cdots\cdots$ ㉠
의 판별식을 D 라고 하면
$\frac{D}{4}=(2b)^2-5\left(b^2-4\right)=-b^2+20$
원과 직선이 만나지 않으려면 ㉠이
실근을 갖지 않아야 하므로
$\frac{D}{4}<0$ 에서 $-b^2+20<0, b^2-20>0$
$\therefore b<-2\sqrt{5}$ 또는 $b>2\sqrt{5}$

23. 다음 원과 직선의 교점의 개수를 구하여라.

$x^2 + y^2 = 4, \quad y = x + 3$

▶ 답: ______ 개

▷ 정답: 0개

해설

원의 중심 $(0, 0)$ 에서 직선 $y = x + 3$ 까지의 거리를 d 라 하면,

$d = \frac{|3|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

이때, $d = \frac{3\sqrt{2}}{2} > 2 = r$

이므로 원과 직선은 만나지 않는다.

$\therefore$ 교점의 개수 : 0 개

24. 직선 $y = x + n$ 과 원 $x^2 + y^2 = 8$ 이 만나지 않도록 하는 자연수 n 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답：

▷ 정답： 5

해설

점 $(0, 0)$ 에서 직선 $y = x + n$ 까지의 거리가 반지름의 길이 $2\sqrt{2}$ 보다 크면 된다.

$\frac{|n|}{\sqrt{2}} > 2\sqrt{2}$

$\therefore$ $n > 4$ ($\because$ n 은 자연수)

$\therefore$ 최소의 n 은 5이다.

25. 직선 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 이 원 $x^2+y^2=4$ 에 접할 때, a^2+b^2 의 최솟값을 구하면?

① 2　　② 4　　③ 8　　④ 12　　⑤ 16

해설

주어진 직선이 원에 접하므로 원의 중심과 직선 사이의 거리는 원의 반지름과 같다.

$\therefore \frac{|-1|}{\sqrt{(\frac{1}{a})^2+(\frac{1}{b})^2}}=2$

$\Rightarrow \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{4}$

$\Rightarrow a^2+b^2=\frac{1}{4}(ab)^2 \quad \cdots$ ㉠

산술기하 조건에 의해 $a^2+b^2 \geq 2ab$

즉, $a^2+b^2=2ab$ 일 때 최소이다.

㉠에 대입시키면, $2ab=\frac{1}{4}(ab)^2$

$\therefore\ ab=8$

$\therefore\ a^2+b^2$ 의 최솟값은 $2ab=16$

26. 원 $x^2+y^2+10x-8y+16=0$ 에 의하여 잘려지는 x축 위의 선분의 길이를 구하여라.

▶ 답：

▷ 정답： 6

해설

x 축을 지나는 점은 $y=0$ 이므로
$x^2+10x+16=0 \Rightarrow (x+2)(x+8)=0$
$\Rightarrow x=-2,\ -8$
$\therefore$ x 축 위의 교점 : $(-8,\ 0),\ (-2,\ 0)$
$\therefore$ 구하는 선분의 길이 : 6

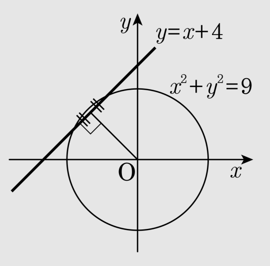
27. 직선 $y = x+4$가 원 $x^2+y^2 = 9$에 의해서 잘린 현의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

원의 중심 원점에서 직선에 이르는 거리는 직선 $x - y + 4 = 0$ 이므로 $\frac{|4|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$



원의 중심에서 현에 내린 수선은 현을 수직이등분하므로 피타고라스 정리에서 ,

현의 길이는 $2\sqrt{3^2 - (2\sqrt{2})^2} = 2$

28. 점 $(1, 3)$ 에서 원 $x^2 + y^2 = 1$ 에 접선을 그을 때 접선의 길이를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

원의 중심과 점 $(1, 3)$ 사이의 거리는 $\sqrt{10}$ 이므로
피타고라스의 정리에 의해 접선의 길이는 $\sqrt{10 - 1} = 3$

29. 직선 $(a-1)x-(a-2)y-1=0$ 이 원 $x^2+y^2-2x-4y+1=0$의 넓이를 이등분할 때, a의 값은?

① -1　② 0　③ 1　④ 2　⑤ 3

해설

직선이 원의 넓이를 이등분하려면 직선이 원의 중심을 지나면 된다.
$x^2+y^2-2x-4y+1=0$, $(x-1)^2+(y-2)^2=4$
따라서 원의 중심 $(1,2)$ 가 직선 위에 있으므로 $(a-1)\times 1-(a-2)\times 2-1=0$
$\therefore\ a=2$

30. 원 $(x+2)^2+(y-1)^2=10$ 위의 점 $(-3,\ 4)$ 에서의 접선의 방정식이 $y=mx+n$ 일 때, $3m+n$ 의 값을 구하면?

▶ 답:

▷ 정답: 6

해설

$(-3,\ 4)$ 을 지나는 방정식 : $y=m(x+3)+4$
원에 접하므로 원 중심에서 직선까지 거리는 반지름과 같다.

$\Rightarrow \dfrac{|m\times(-2)-1\times1+3m+4|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{10}$

$\Rightarrow (m+3)^2=10m^2+10$

$\Rightarrow (3m-1)^2=0,\ m=\dfrac{1}{3}$

$\therefore$ 접선의 방정식은 $y=\dfrac{1}{3}x+5 \Rightarrow 3m+n=6$

31. 직선 $3x+4y+a=0$ 이 원 $x^2+y^2-2x+2y=2$ 에 접할 때, 양수 a 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a=11$

해설

원의 방정식을 표준형으로 나타내면
$(x-1)^2+(y+1)^2=2^2$
직선이 원에 접하므로 원의 중심
$(1,\ -1)$ 에서 직선까지의 거리가
원의 반지름의 길이2 와 같다.
따라서, $\dfrac{|3\cdot 1+4\cdot(-1)+a|}{\sqrt{3^2+4^2}}=2$
$|a-1|=10$
$a-1=\pm 10$
$a>0$ 이므로 $a=11$

32. 원 $x^2+y^2=1$ 밖의 점 $(-1,\ 2)$에서 원에 그은 접선의 방정식을 구하면?

① $x-2y=4,\ y=2$　② $3x+4y=1,\ x=-1$

③ $4x-3y=5,\ x=-1$　④ $4x-3y=5,\ y=2$

⑤ $3x+4y=5,\ x=-1$

해설

접선의 기울기를 m이라 하면 기울기가 m이고 점 $(-1,2)$을 지나는 직선의 방정식은

$y=m(x+1)+2=mx+m+2$

$\therefore mx-y+m+2=0 \cdots$ ㉠

원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 ㉠ 사이의 거리가

원의 반지름의 길이 1과 같아야 하므로

$$\frac{|m+2|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1,\ |m+2|=\sqrt{m^2+1}$$

양변에 제곱을 하여 정리하면

$m^2+4m+4=m^2+1$

$\therefore m=-\frac{3}{4}$

$m=-\frac{3}{4}$ 을 ㉠에 대입하여 정리하면

$3x+4y-5=0$

한편, 점 $(-1,\ 2)$에서 원 $x^2+y^2=1$에 그은 접선 중 y축과 평행한 접선 을 가지므로 $x=-1$

따라서 구하는 접선의 방정식은 $3x+4y=5,\ x=-1$

33. 중심이 직선 $2x+y=0$ 위에 있고, 두 점 $(3,\ 0)$, $(0,\ 1)$ 을 지나는 원의 방정식은 ?

① $x^2+y^2-2x+4y-6=0$

② $x^2+y^2+2x-4y-6=0$

③ $5x^2+5y^2-8x+16y-21=0$

④ $5x^2+5y^2+8x-16y-21=0$

⑤ $x^2+y^2-4x+8y-12=0$

해설

구하는 원의 중심이 직선 $2x+y=0$ 위에 있으므로 중심을 $(a,\ -2a)$ 라 할 수 있다.

$(x-a)^2+(y+2a)^2=r^2$

점 $(3,\ 0)$ 을 지나므로,

$(3-a)^2+(2a)^2=r^2\cdots$①

또, 점 $(0,\ 1)$ 을 지나므로,

$a^2+(1+2a)^2=r^2\cdots$②

①, ②에서 $a=\frac{4}{5}$, $r^2=\frac{37}{5}$

$\therefore\ \left(x-\frac{4}{5}\right)^2+\left(y+\frac{8}{5}\right)^2=\frac{37}{5}$

정리하면 $5x^2+5y^2-8x+16y-21=0$

34. 제1 사분면에서 x 축과 y 축에 동시에 접하면서 반지름의 길이가 r 인 원의 중심을 C_1, 제2 사분면에서 x 축과 y 축에 동시에 접하면서 반지름의 길이가 $\frac{1}{2}r$ 인 원의 중심을 C_2, 제3 사분면에서 x 축과 y 축에 동시에 접하면서 반지름의 길이가 $\frac{1}{4}r$ 인 원의 중심을 C_3, 제4 사분면에서 x 축과 y 축에 동시에 접하면서 반지름의 길이가 $\frac{1}{8}r$ 인 원의 중심을 C_4 라 하자.
$\overline{\mathrm{C_1C_2}}+\overline{\mathrm{C_2C_3}}+\overline{\mathrm{C_3C_4}}=14\sqrt{10}$ 일 때, r 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$\mathrm{C_1}\,(r, r)$, $\mathrm{C_2}\left(-\frac{1}{2}r, \frac{1}{2}r\right)$,

$\mathrm{C_3}\left(-\frac{1}{4}r, -\frac{1}{4}r\right)$, $\mathrm{C_4}\left(\frac{1}{8}r, -\frac{1}{8}r\right)$ 이므로

$\overline{\mathrm{C_1C_2}}+\overline{\mathrm{C_2C_3}}+\overline{\mathrm{C_3C_4}}$

$=\sqrt{\left(-\frac{3}{2}r\right)^2+\left(-\frac{1}{2}r\right)^2}+\sqrt{\left(\frac{1}{4}r\right)^2+\left(-\frac{3}{4}r\right)^2}$

$\quad+\sqrt{\left(\frac{3}{8}r\right)^2+\left(\frac{1}{8}r\right)^2}$

$=\frac{\sqrt{10}}{2}r+\frac{\sqrt{10}}{4}r+\frac{\sqrt{10}}{8}r$

$=\frac{7\sqrt{10}}{8}r=14\sqrt{10}$

$\therefore r=16$

35. 두 정점 $A(-1,\ 0)$, $B(2,\ 0)$ 으로부터 거리의 비가 $1\ :\ 2$ 인 점 P 에 대하여 다음 <보기> 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

ㄱ $\triangle$PAB 의 넓이의 최댓값은 3 이다.
ㄴ $\angle$PBA 의 최대 크기는 $60°$ 이다.
ㄷ 점 P 의 자취의 길이는 4π 이다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해설

두 정점 $A(-1,\ 0)$, $B(2,\ 0)$ 으로부터 거리의 비가 $1\ :\ 2$ 인 점 P 의 자취는 $(0, 0)$ 과 $(-4, 0)$ 을 지름의 양 끝으로 하는 원이다. 따라서 이 원은 $(x+2)^2+y^2=4$ 로 나타낼 수 있다.
삼각형 밑변의 길이가 정해져있으므로 높이가 최대일 때 삼각형의 넓이도 최대가 된다.
따라서 원의 반지름인 2 가 높이일 때의 넓이인 3 이 최댓값이다.
$\angle$PBA 의 최대 크기는 점 P 가 원에 접할 때이므로 $\sin(\angle PBA)=\dfrac{2}{2-(-2)}=\dfrac{1}{2}$ 에서
$\angle PBA = 30°$
점 P 의 자취의 방정식은 $(x+2)^2+y^2=4$ 이므로 둘레의 길이는 4π 이다

36. 원 $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 6 = 0$ 과 직선 $3x + 4y - a = 0$이 서로 접할 때, 모든 a 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 26

해설

원의 방정식을 표준형으로 바꾸면
$(x-3)^2 + (y-1)^2 = 2^2$
원의 중심 $(3, 1)$ 에서 직선까지의 거리 d가 2이면 접하므로
$$d = \frac{|3 \cdot 3 + 4 \cdot 1 - a|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 2$$
$\therefore \ |13 - a| = 10 \Leftrightarrow 13 - a = \pm 10$
따라서, $a = 3$ 또는 23 이므로
모든 a 값들의 합은 26

37. 점 $(1,\ -1)$ 에서 원 $(x+1)^2+(y-2)^2=1$ 에 그은 접선은 두 개 있다. 이 때, 이 두 직선의 기울기의 합은?

① -3　② -4　③ -5　④ -6　⑤ -7

해설

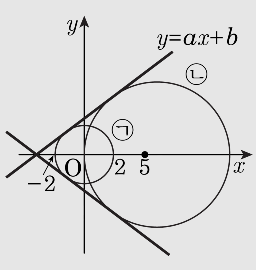
점 $(1,\ -1)$ 을 지나고 기울기가 m 인 접선을
$y+1=m(x-1)$, 즉 $mx-y-m-1=0$ 이라고 하면
원의 중심 $(-1,\ 2)$ 에서 접선까지의 거리는
원의 반지름 1과 같아야 한다.
따라서 $1=\dfrac{|-2m-3|}{\sqrt{m^2+1}}$,
$|-2m-3|=\sqrt{m^2+1}$
양변을 제곱하여 정리하면 $3m^2+12m+8=0$
따라서 두 기울기의 합은 근과 계수와의 관계에 의하여 -4 이다.

38. 다음 두 원의 공통접선의 방정식을 구하면?

$x^2+y^2=4$, $(x-5)^2+y^2=25$

① $y=\pm\frac{3}{4}x\pm\frac{5}{2}$ (복부호 동순)
② $y=\pm\frac{4}{5}x\pm 2$ (복부호 동순)
③ $y=\pm\frac{5}{6}x\pm\frac{7}{5}$ (복부호 동순)
④ $y=\pm\frac{9}{10}x\pm\frac{11}{8}$ (복부호 동순)
⑤ $y=\pm\frac{10}{11}x\pm\frac{4}{3}$ (복부호 동순)

해설



$x^2+y^2=4 \cdots\cdots$ ㉠
$(x-5)^2+y^2=25 \cdots\cdots$ ㉡
공통접선의 방정식을 $y=ax+b$ $\cdots\cdots$ ㉢로 놓으면
원 ㉠과 직선㉢, 즉 $ax-y+b=0$ 이 접하므로

$$\frac{|b|}{\sqrt{a^2+(-1)^2}}=2$$

$\therefore |b|=2\sqrt{a^2+1} \cdots\cdots$ ㉣
또, 원 ㉡도 직선 ㉢, 즉 $ax-y+b=0$ 과 접하므로

$$\frac{|5a+b|}{\sqrt{a^2+(-1)^2}}=5$$

$\therefore |5a+b|=5\sqrt{a^2+1} \cdots\cdots$ ㉤
그런데 $b\neq 0$ 이므로 ㉤ ÷ ㉣을 하면

$$\frac{|5a+b|}{|b|}=\frac{5}{2}$$

$2|5a+b|=5|b|, 2(5a+b)=\pm 5b$

$\therefore b=-\frac{10}{7}a$ 또는 $b=\frac{10}{3}a$

(i) $b=-\frac{10}{7}a$ 일 때, ㉣에서

$\frac{10}{7}|a|=2\sqrt{a^2+1}, 5|a|=7\sqrt{a^2+1}$

양변을 제곱하여 정리하면
$24a^2+49=0$
이것을 만족하는 실수 a 는 없다.

(ii) $b=\frac{10}{3}a$ 일 때, ㉣에서

$\frac{10}{3}|a|=2\sqrt{a^2+1}, 5|a|=3\sqrt{a^2+1}$

양변을 제곱하여 정리하면 $16a^2=9, a^2=\frac{9}{16}$

$\therefore a=\pm\frac{3}{4}, b=\pm\frac{5}{2}$ (복부호 동순)

(i), (ii) 로부터 구하는 공통접선의 방정식은

$y=\pm\frac{3}{4}x\pm\frac{5}{2}$ (복부호 동순)

39. $(k,\ 0)$에서 $x^2+y^2-2y=0$에 그은 두 접선이 이루는 각의 크기가 $45°$일 때, 양수 k의 값을 구하면?

① $k=-\sqrt{2}+1$　② $k=\sqrt{2}+1$　③ $k=\sqrt{2}-1$
④ $k=2\sqrt{2}+1$　⑤ $k=\sqrt{2}+2$

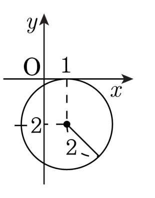
해설

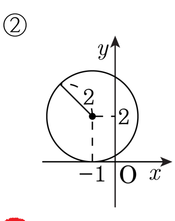
$x^2+y^2-2y=0$에서 $x^2+(y-1)^2=1$이므로
두 접선 중 하나는 x축이고,
두 접선이 이루는 각의 크기가 $45°$이므로
다른 하나의 접선의 기울기는 -1이다. $(\because\ k>0)$
따라서 접선의 방정식을 $y=-x+b$로 놓으면 $x+y-b=0$
이 때, 원의 중심 $(0,1)$에서 이 직선까지의 거리가
원의 반지름과 같으므로

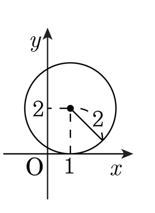
$$\frac{|0+1-b|}{\sqrt{1^2+1^2}}=1$$

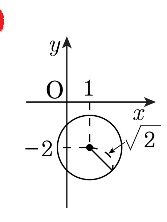
$\therefore |1-b|=\sqrt{2}$
$b>1$이므로 $b-1=\sqrt{2}$
$\therefore b=\sqrt{2}+1$
따라서 접선의 방정식은 $y=-x+\sqrt{2}+1$이고
점 $(k,0)$을 지나므로
$0=-k+\sqrt{2}+1$　　$\therefore k=\sqrt{2}+1$

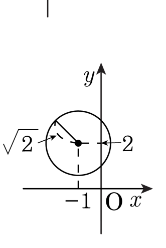
40. 원 $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 3 = 0$ 의 그래프로 옳은 것은?

①


②


③


④


⑤


해설

$x^2 + y^2 - 2x + 4y + 3 = 0$

$\therefore$ 중심은 $(1, -2)$ 이고, 반지름은 $\sqrt{2}$

41. 좌표평면에서 중심이 (a, b) 이고 x 축에 접하는 원이 두 점 $\mathrm{A}(0, 5)$ 와 $\mathrm{B}(8, 1)$ 을 지난다. 이 때, 원의 중심 (a, b) 와 직선 AB 사이의 거리는? (단, $0 \le a \le 8$)

① $\sqrt{3}$　② $\sqrt{5}$　③ $\sqrt{6}$　④ $\sqrt{7}$　⑤ $2\sqrt{2}$

해설

주어진 원이 x 축에 접하므로 그 방정식은
$(x-a)^2+(y-b)^2=b^2$
$\therefore\ x^2+y^2-2ax-2by+a^2=0$
이 원이 두 점 $\mathrm{A}(0,\ 5), \mathrm{B}(8,\ 1)$ 을 지나므로
$a^2-10b+25=0, a^2-16a-2b+65=0$
두 식을 연립하면
$4a^2-80a+300=0, 4(a-5)(a-15)=0$
그런데
$0 \le a \le 8$ 이므로 $a=5,\ b=5$ 이다.
이 때, 직선 AB 의 방정식은
$y-5=\dfrac{1-5}{8-0}(x-0)$
$\therefore\ x+2y-10=0$
따라서 원의 중심 $(5,\ 5)$ 와 직선 AB 사이의 거리 d 는
$d=\dfrac{|5+2\cdot 5-10|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\sqrt{5}$

42. 두 점 $\mathrm{A}(-8,\ -2)$, $\mathrm{B}(2,\ 8)$ 에 대하여 원 $x^2+y^2=27$ 위를 움직이는 점을 P 라고 할 때, $\triangle\mathrm{ABC}$ 의 무게 중심 G 는 어떻게 움직이는가?

① $(x+1)^2+(y-1)^2=1$
② $(x+1)^2+(y-1)^2=2$
③ $(x+2)^2+(y+1)^2=2$
④ $(x+2)^2+(y-2)^2=3$
⑤ $(x+1)^2+(y-1)^2=4$

해설

$\mathrm{P}(a,\ b)$ $a^2+b^2=27$

무게중심 $\mathrm{G}(x,y)=\left(\dfrac{-8+2+a}{3},\ \dfrac{-2+8+b}{3}\right)$

$=\left(\dfrac{a-6}{3},\ \dfrac{b+6}{3}\right)$

$X=\dfrac{a-6}{3},\ Y=\dfrac{b+6}{3}$

$a=3X+6,\ b=3Y-6$ $a^2+b^2=27$ 에 대입하면,

$(3X+6)^2+(3Y-6)^2=27$

$\therefore\ (X+2)^2+(Y-2)^2=3$

따라서 $\mathrm{G}(X,\ Y)$ 의 자취는 $(x+2)^2+(y-2)^2=3$

43. 직선 $x+y=r$ 에 원 $x^2+y^2=r$ 이 접할 때, 양수 r 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$x^2+y^2=r,\ x+y=r$ 이 접하므로 연립방정식의 해가 중근을 가진다.

$x^2+(r-x)^2=r$, $2x^2-2rx+r^2-r=0$

$D/4=r^2-2(r^2-r)=0$ 에서

$-r^2+2r=0,$

$\therefore\ r=0,\ 2$

따라서 양수 $r=2$

44. 점 O 를 지나는 직선이 좌표평면 위의 원 C 와 두 점 A, B 에서 만날 때, $\overline{OA} \cdot \overline{OB}$ 의 값이 일정함을 다음과 같이 증명하였다.
㉮,㉯,㉰에 알맞은 것을 차례로 적으면?

증명

원점 O을 지나는 직선의 방정식을
$y = mx \cdots\cdots$ ㉠
원 C의 방정식을 $(x-a)^2 + y^2 = r^2$
$(a > O, r > O) \cdots\cdots$ ㉡ 라 하자
㉠,㉡에서 $(1+m^2)x^2 - 2ax + a^2 - r^2 = 0 \cdots\cdots$ ㉢
㉢ 의 두 실근을 α,β라 하면 $\alpha\beta =$ (㉮)
따라서 $\overline{OA} \cdot \overline{OB} =$ (㉯) $\cdot\, |\alpha\beta| =$ (㉰)
그러므로 m에 관계없이 $\overline{OA} \cdot \overline{OB}$의 값은 일정하다.

① $\dfrac{a^2 - r^2}{1 - m^2}$, $1 - m^2$, $|a^2 - r^2|$
② $\dfrac{a^2 - r^2}{1 + m^2}$, $1 + m^2$, $|a^2 - r^2|$
③ $\dfrac{a^2 - r^2}{1 - m^2}$, $2(1 - m^2)$, $2|a^2 - r^2|$
④ $\dfrac{a^2 - r^2}{1 + m^2}$, $2(1 + m^2)$, $2|a^2 - r^2|$
⑤ $\dfrac{a^2 - r^2}{1 + m^2}$, $r(1 + m^2)$, $r|a^2 - r^2|$

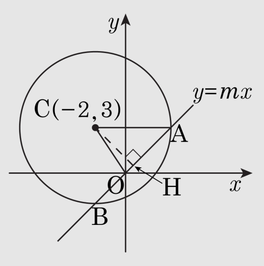
해설

㉢에서 근과 계수와의 관계에서
$\alpha\beta = \dfrac{a^2 - r^2}{1 + m^2}$
$A(\alpha, m\alpha)$, $B(\beta, m\beta)$ 이므로
$\overline{OA} \cdot \overline{OB} = \sqrt{\alpha^2 + (m\alpha)^2} \cdot \sqrt{\beta^2 + (m\beta)^2}$
$= (1+m^2)|\alpha\beta| = |a^2 - r^2|$

45. 직선 $y = mx$ 와 원 $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 25$ 의 두 교점을 A, B 라 할 때, 현 AB 의 길이가 최소가 되도록 하는 상수 m 의 값은?

① $-\frac{3}{2}$　② $-\frac{2}{3}$　③ $\frac{1}{2}$　④ $\frac{2}{3}$　⑤ $\frac{3}{2}$

해설



그림과 같이 원의 중심 C(−2, 3) 에서
직선 $y = mx$ 에 내린 수선의 발을 H 라 하면

$\triangle$CAH 에서 $\overline{AH}^2 = \overline{CA}^2 - \overline{CH}^2$
$= 25 - \overline{CH}^2$

따라서 $\overline{CH}$ 가 최대일 때, $\overline{AH}$가 최소이다.

$\triangle$COH 에서 $\overline{CH}^2 = \overline{CO}^2 - \overline{OH}^2$

$\overline{CH}$가 최대가 되기 위해서는

$\overline{CH} = \overline{CO}$ ($\overline{OH} = 0$) 일 때이므로

$\overline{CO} \perp \overline{AB}$

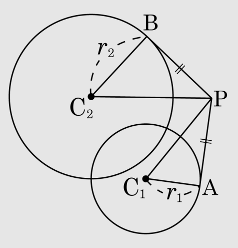
직선 OC 의 기울기는 $-\frac{3}{2}$ 이므로 $m = \frac{2}{3}$

46. 한 점 $P(a,\ b)$ 에서 두 원 $(x-4)^2+(y+1)^2=4$ 와 $(x-2)^2+(y-2)^2=9$ 에 그은 각각의 접선과 두 원과의 접점을 A, B 라 할 때, $\overline{PA}=\overline{PB}$ 인 점 $P(a,\ b)$ 의 자취를 구하면?

① $2a-3b-7=0$ ② $2a-3b+7=0$
③ $a^2+b^2=3$ ④ $a^2+b^2=4$
⑤ $a^2+b^2=5$

해설

$(x-4)^2+(y+1)^2=4,\ (x-2)^2+(y-2)^2=9$
문제의 조건에서
$\overline{PA}=\overline{PB}$이므로 $(\overline{PA})^2=(\overline{PB})^2$
$\Rightarrow\ (\overline{PC_1})^2-{r_1}^2=(\overline{PC_2})^2-{r_2}^2$



원의 중심 $C_1=(4,\ -1),\ C_2=(2,\ 2)$,
반지름 $r_1=2,\ r_2=3$
$\therefore\ (a-4)^2+(b+1)^2-4=(a-2)^2+(b-2)^2-9$
$\therefore$ 위를 정리하면 $2a-3b-7=0$

47. 다음 중 원 $(x+1)^2+y^2=1$에 접하고 원 $(x-1)^2+y^2=1$의 넓이를 이등분하는 직선의 방정식은?

① $x+\sqrt{3}y=1$ ② $\sqrt{3}x+y=1$ ③ $x-\sqrt{3}y=-1$
④ $\sqrt{3}x-y=-3$ ⑤ $x+y=2$

해설

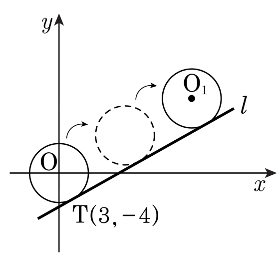
원 $(x-1)^2+y^2=1$ 의 넓이를 이등분하기 위해서는 중심 $(1,0)$을 지나야 한다.
곧, $(1,0)$을 지나는 원 $(x+1)^2+y^2=1$의 접선을 구하면 된다.
기울기를 m 이라 두면, 구하는 직선은
$y=m(x-1)$, $mx-y-m=0$
중심$(-1,0)$에서 이 직선에 이르는 거리가 반지름 1과 같으면 된다.

$$\frac{|-m-m|}{\sqrt{m^2+1}}=1$$

$$\therefore\ m=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

대입하여 정리하면,
$x+\sqrt{3}y=1$ 또는 $x-\sqrt{3}y=1$

48. 다음 그림과 같이 원점을 중심으로 하는 원 O 가 점 T$(3, -4)$ 에서 직선 l 에 접하고 있다. 직선 l 을 따라 원 O 를 굴려서 생긴 원 O_1 의 방정식을 $(x-a)^2+(y-b)^2=25$ 라 할 때, $\frac{b}{a}$ 의 값은?



① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{3}{4}$
④ 1 ⑤ $\frac{4}{3}$

해설

직선 l 이 점 T$(3,\ -4)$ 에서 원 O 와 접하므로
직선 OT 와 직선 l 은 수직이다.

직선 OT 의 기울기는 $-\frac{4}{3}$ 이므로

직선 l 의 기울기는 $\frac{3}{4}$ 이다.

한편, 원 O_1 의 중심의 좌표는 $(a,\ b)$ 이므로

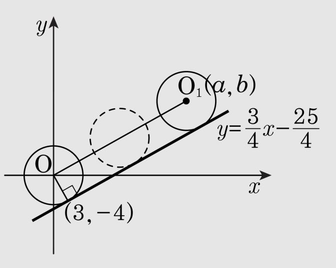
$\frac{b}{a}$ 의 값은 직선 OO_1 의 기울기와 같고,

직선 OO_1 과 직선 l 은 서로 평행하다.

$\fallingdotseq \frac{b}{a}$ (직선 OO_1 의 기울기)

$=$ (직선 l 의 기울기)

$= \frac{3}{4}$



직선 l 의 방정식은 $y-(-4) = \frac{3}{4}(x-3)$

$\therefore\ y=\frac{3}{4}x-\frac{25}{4}$

49. 2개의 원 $x^2+y^2=1$, $(x-4)^2+y^2=4$ 의 공통접선의 기울기를 구하면 ?

① $\pm\frac{3\sqrt{7}}{7}$, $\pm\frac{\sqrt{15}}{15}$　② $\pm\frac{3\sqrt{7}}{2}$, $\pm\frac{\sqrt{15}}{5}$
③ $\pm\frac{3\sqrt{7}}{4}$, $\pm\frac{\sqrt{15}}{8}$　④ $\pm\frac{3\sqrt{7}}{5}$, $\pm\frac{\sqrt{15}}{10}$
⑤ $\pm\frac{3\sqrt{7}}{8}$, $\pm\frac{\sqrt{15}}{12}$

해설

$x^2+y^2=1 \cdots\cdots$ ①
$(x-4)^2+y^2=4 \cdots\cdots$ ②
공통접선을 $y=mx+n \cdots\cdots$ ③이라 하면
①의 중심과 ③과의 거리는 1이고,
②의 중심과 ③과의 거리는 2이므로

$$\frac{|n|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1 \text{ 이고}$$

$$\frac{|4m+n|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2$$

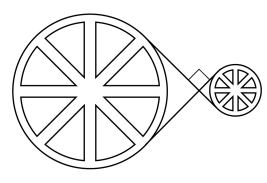
$\Rightarrow\ m^2+1=n^2 \cdots\cdots$ ④
$4(m^2+1)=(4m+n)^2 \cdots$ ⑤
④를 ⑤에 대입하여 인수분해하면
$(4m+3n)(4m-n)=0$

$n=-\frac{4}{3}m$ 에서 $m=\pm\frac{3\sqrt{7}}{7}$

$n=4m$ 에서 $m=\pm\frac{\sqrt{15}}{15}$

$\therefore\ m=\pm\frac{3\sqrt{7}}{7},\ \pm\frac{\sqrt{15}}{15}$

50. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 6, 2 인 두 원판을 ∞ 모양으로 벨트를 채웠는데 가운데 부분이 수직으로 만난다고 한다. 이 벨트의 길이를 $a+b\pi$ 라고 할 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

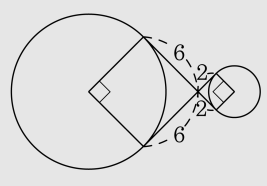


▶ 답 :

▷ 정답 : 28

해설

두 원의 내접선의 길이는 다음 그림에서 $6+2=8$ 이다.



$\therefore$ 벨트의 길이는

$2\times8+\pi\times2\times6\times\frac{270}{360}+\pi\times2\times2\times\frac{270}{360}$

$=16+12\pi$

$\therefore\ a+b=28$