1. $f(x)=x^3-3x^2+3x+1$일 때, $f(x)-2=x(x^2-1)+a(x-x^2)+b(x^2-1)$가 항상 성립하도록 하는 상수 $a,\ b$에 대하여 $a+b$의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$f(x)-2=x^3-3x^2+3x-1$이므로

$x^3-3x^2+3x-1=x(x^2-1)+a(x-x^2)+b(x^2-1)$

$=x^3+(-a+b)x^2+(a-1)x-b\cdots$㉠

㉠이 x에 대한 항등식이므로 양변의 차수가 같은 항의 계수가 같아야 한다.

즉, $-a+b=-3,\ a-1=3,\ b=1$

이므로 $a=4,\ b=1$

$\therefore\ a+b=5$

2. $x^3-6x^2+11x-6$을 인수분해 하면?

① $(x+1)(x-2)(x+3)$
② $(x-1)(x+2)(x+3)$
③ $(x-1)(x-2)(x-3)$
④ $(x+1)(x+2)(x-3)$
⑤ $(x-1)(x-2)(x+3)$

해설

인수정리를 이용하면
$f(1)=0$, $f(2)=0$, $f(3)=0$이므로
(준식)$=(x-1)(x-2)(x-3)$

3. $i^{2000}+i^{2002}+i^{2003}+i^{2004}$ 의 값을 구하면?

① 1　　② $1-i$　　③ $1+i$　　④ -1　　⑤ 0

해설

$i^4=1$ 이므로

$i^{4k}=1,\ i^{4k+1}=i,\ i^{4k+2}=-1,\ i^{4k+3}=-i$

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= 1+(-1)+(-i)+1 \\ &= 1-i\end{aligned}$$

4. 이차방정식 $x^2 + 2(k-1)x + 4 = 0$ 이 중근을 갖도록 하는 상수 k 값들의 합은?

① 1 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 2

해설

중근을 가지려면 판별식 $D = 0$

$\frac{D}{4} = (k-1)^2 - 4 = 0$

$k^2 - 2k - 3 = 0$, $(k-3)(k+1) = 0$

$\therefore\ k = 3, -1$

5. 이차함수 $y = x^2 + 4x + 1$ 의 최솟값을 구하면?

① -1 ② 1 ③ -3 ④ 3 ⑤ -5

해설

$y = x^2 + 4x + 1$
$= (x + 2)^2 - 3$
$x = -2$ 일 때, 최솟값은 -3 이다.

6. 함수 $f(x)=ax^2-2ax+b$가 $-2\le x\le 2$에서 최댓값 5 , 최솟값 -4를 가질 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이고 $a<0$)

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

$f(x)=ax^2-2ax+b$
$=a(x-1)^2-a+b$ 에서 $a<0$ 이고
꼭짓점의 x좌표 1이 $-2\le x\le 2$에 속하므로
$x=1$일 때 최댓값을 갖고,
$x=-2$일 때 최솟값을 갖는다.
즉, $f(1)=-a+b=5$, $f(-2)=8a+b=-4$
두 식을 연립하여 풀면 $a=-1, b=4$
$\therefore a+b=3$

7. 삼차방정식 $(x-1)(x-2)(x-3)=24$의 모든 실근의 합은?

① 4　② 5　③ 6　④ 7　⑤ 8

해설

$(x-1)(x-2)(x-3)=24$를 전개하면

$x^3-6x^2+11x-30=0$

$x=5$를 대입하면 성립하므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 5 & 1 & -6 & 11 & -30 \\ & & 5 & -5 & 30 \\ \hline & 1 & -1 & 6 & \boxed{0} \end{array}$$

$(x-5)(x^2-x+6)=0$

$\therefore\ x=5$ 또는 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{23}i}{2}$

따라서, 실근은 5뿐이므로 실근의 합은 5이다.

8. 두 다항식 $(1+2x+3x^2+4x^3)^3$, $(1+2x+3x^2+4x^3+5x^4)^3$ 의 x^3 의 계수를 각각 a, b 라 할 때, $a-b$ 의 값을 구하면?

① -21　　② -15　　③ -5　　④ -1　　⑤ 0

해설

$(1+2x+3x^2+4x^3+5x^4)^3$ 의 전개식에서
x^4 항의 계수는 x^3 의 계수와는 관계가 없다.
따라서 $(1+2x+3x^2+4x^3)^3$ 의 전개식에서 x^3 의 계수와 $(1+2x+3x^2+4x^3+5x^4)^3$ 의 전개식에서 x^3 의 계수는 같다.
$\therefore\ a=b \quad \therefore\ a-b=0$

9. 다항식 $f(x) = x^3 - 3x^2 + kx - 6$이 일차식 $x - 2$로 나누어떨어질 때, $f(x)$를 $x - 1$로 나눈 나머지는?

① -3　② -1　③ 2　④ 4　⑤ 5

해설

$f(x) = (x-2)Q(x)$
즉, $f(2) = 8 - 12 + 2k - 6 = 0$
$\therefore\ k = 5$
$f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 6$
$\therefore\ f(1) = -3$

10. 일차식 $f(x)$와 이차식 $g(x)$의 최대공약수는 $x+1$이고, 두 식의 곱은 $f(x)g(x)=x^3-x^2+ax+b$일 때, ab의 값은?

① 0 ② 5 ③ 10 ④ 15 ⑤ 20

해설

최대공약수가 $x+1$이고 두 식의 곱이 최고차항의 계수가 1이므로

$f(x)=x+1,\ g(x)=(x+1)(x+c)$

$f(x)g(x)=(x+1)(x+1)(x+c)$

$=x^3+(c+2)x^2+(2c+1)x+c$

$=x^3-x^2+ax+b$

계수를 비교하면 $c+2=-1,\ 2c+1=a,\ b=c$

$\therefore\ c=-3,\ a=-5,\ b=-3$

$\therefore\ ab=15$

해설

$f(x)g(x)=x^3-x^2+ax+b$는 $x+1$로 두 번 나누어 떨어진다.

조립제법으로 나누어 보면

$-a+b-2=0, a+5=0$

$\therefore\ a=-5,\ b=-3$이므로 $ab=15$

11. $x = 1 + \sqrt{2}i$, $y = 1 - \sqrt{2}i$ 일 때, $x^3 - y^3$ 의 값을 구하면?

① $2\sqrt{2}i$ ② $-2\sqrt{2}i$ ③ $\sqrt{2}i$
④ $-\sqrt{2}i$ ⑤ $2i$

해설

$x^3 - y^3 = (x-y)^3 + 3xy(x-y)$
$x - y = 2\sqrt{2}i$, $xy = (1+\sqrt{2}i)(1-\sqrt{2}i) = 3$

$$\begin{aligned} x^3 - y^3 &= (2\sqrt{2}i)^3 + 3 \cdot 3 \cdot (2\sqrt{2}i) \\ &= -16\sqrt{2}i + 18\sqrt{2}i \\ &= 2\sqrt{2}i \end{aligned}$$

12. $a-b<0$ 이고 $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$ 일 때, $\sqrt{(a-b)^2}-|a+b|$ 를 간단히 하면?

① b ② $2b$ ③ $a-2b$

④ $2a+b$ ⑤ 0

해설

$a-b<0$, $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$ 이므로 $a<0$, $b<0$

따라서 $a-b<0$, $a+b<0$ 이므로

$$\begin{aligned}\sqrt{(a-b)^2}-|a-b| &= |a-b|-|a+b| \\ &= -(a-b)+(a+b) \\ &= -a+b+a+b=2b\end{aligned}$$

13. 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 에 대한 설명으로 다음 <보기> 중 옳은 것의 개수는? (단, a, b, c, p, q 는 실수, $i=\sqrt{-1}$)

보기

㉠ 판별식은 b^2-4ac 이다.

㉡ 두 근의 합은 $\frac{b}{a}$ 이다.

㉢ $a<0$, $c<0$ 이면 허근만 갖는다.

㉣ $a>0$, $c<0$ 이면 서로 다른 두 실근을 갖는다.

㉤ 두 근의 곱은 $\frac{c}{a}$ 이다.

㉥ 한 근이 $p+qi$ 이면 다른 한 근은 $q-pi$ 이다.

① 1개　② 2개　③ 3개　④ 4개　⑤ 5개

해설

㉠ 실계수 방정식에서만 판별식을 사용할 수 있다. 현재 a, b, c 가 실수이므로 판별식 사용 가능 (참)

㉡ 두근의 합은 $-\frac{b}{a}$ 이다. (거짓)

㉢ b^2-4ac 에서 $ac>0$ 이다.
하지만 $b^2<4ac$ 인 경우만 허근을 가짐 (거짓)

㉣ 판별식 b^2-4ac 에서 $ac<0$ 이므로 $b^2-4ac>0$ (참)

㉤ 두 근의 곱은 $\frac{c}{a}$ 이다. (참)

㉥ 실계수 방정식에서 한 근이 $p+qi$ 이면 $p-qi$ 가 또 다른 한 근이다.(거짓)

14. x에 대한 이차방정식 $x^2-4x+ka-2k+b=0$이 k의 값에 관계없이 중근을 가지도록 실수 a, b의 값을 정할 때, $a+b$의 값은?

① 0　　② 2　　③ 4　　④ 6　　⑤ 8

해설

중근을 가지려면 판별식은 0이다.

$D' = 2^2 - (ka - 2k + b) = 0$

$\Rightarrow \quad (2-a)k + 4 - b = 0$

모든 k에 대하여 성립하려면

$a = 2,\ b = 4$

$\therefore\ a + b = 6$

15. 이차방정식 $f(x)=0$의 두근을 α, β라 할 때, $\alpha+\beta=6$이 성립한다. 이 때, 방정식 $f(5x-7)=0$의 두 근의 합은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)=0(a\neq 0)$에서

$f(5x-7)=a(5x-7-\alpha)(5x-7-\beta)=0$

$\therefore\ 5x=7+\alpha,\ 7+\beta$

$\therefore\ x=\dfrac{7+\alpha}{5},\ \dfrac{7+\beta}{5}$

따라서, 구하는 두 근의 합은

$\dfrac{14+\alpha+\beta}{5}=\dfrac{20}{5}=4$