

1. x 에 대한 이차식 $2x^2 + (k+1)x + k - 1$ 이 완전제곱식이 될 때, k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$2x^2 + (k+1)x + k - 1$ 이 완전제곱식이므로

$$D = (k+1)^2 - 8(k-1) = 0$$

$$(k-3)^2 = 0$$

$$\therefore k = 3$$

2. $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \frac{x+i}{x-i}$ 를 만족하는 실수 x 의 값은?

- ① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ 2 ⑤ -5

해설

$$\begin{aligned}(1 + \sqrt{3}i)(x - i) &= 2(x + i) \\ (x + \sqrt{3}) + (\sqrt{3}x - 1)i &= 2x + 2i \\ \text{복소수가 서로 같을 조건에 의하여} \\ x + \sqrt{3} &= 2x, \quad \sqrt{3}x - 1 = 2 \\ \therefore x &= \sqrt{3}\end{aligned}$$

3. 방정식 $|x-3| + |x-4| = 2$ 의 해의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 7

해설

i) $x < 3$ 일 때,
 $-(x-3) - (x-4) = 3, -2x = -5$

$\therefore x = \frac{5}{2}$

ii) $3 \leq x < 4$ 일 때

$(x-3) - (x-4) = 2, 0 \cdot x = 1$

\therefore 해가 없다.

iii) $x \geq 4$ 일 때

$x-3 + x-4 = 2, 2x = 9$

$\therefore x = \frac{9}{2}$

따라서 $x = \frac{5}{2}, \frac{9}{2}$ 이고 그 합은 7

4. 이차방정식 $x^2 - 7x + 1 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$ 의 값은?

- ① 3 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 12

해설

$x^2 - 7x + 1 = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로

$\alpha + \beta = 7, \alpha\beta = 1$

$(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2 = \alpha + 2\sqrt{\alpha\beta} + \beta = 7 + 2 = 9$

따라서 $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = 3$

5. 다음 연립방정식의 해가 아닌 것은?

$$\begin{cases} x^2 - xy - 2y^2 = 0 \\ 2x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$$

① $x = \sqrt{3}, y = -\sqrt{3}$

② $x = 2, y = 1$

③ $x = -\sqrt{3}, y = \sqrt{3}$

④ $x = -2, y = -1$

⑤ $x = 2, y = -1$

해설

$$x^2 - xy - 2y^2 = 0$$

$$\Rightarrow (x + y)(x - 2y) = 0$$

$$\Rightarrow x = -y \text{ 또는 } x = 2y$$

i) $x = -y$ $2x^2 + y^2 = 2y^2 + y^2 = 9$

$$y = \pm\sqrt{3}, x = \mp\sqrt{3}$$

ii) $x = 2y$ $2x^2 + y^2 = 8y^2 + y^2 = 9$

$$y = \pm 1, x = \pm 2$$

$$\therefore \text{해는 } \begin{cases} x = \pm\sqrt{3} \\ y = \mp\sqrt{3} \end{cases}, \begin{cases} x = \pm 2 \\ y = \pm 1 \end{cases} \text{ (복호동순)}$$

6. $f(x) = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{100}$ 일 때, $f\left(\frac{1+i}{1-i}\right)$ 의 값은?

- ① 1 ② $1-i$ ③ $1+i$ ④ -1 ⑤ 0

해설

$$\frac{1+i}{1-i} = i \text{ 이므로}$$

$$f\left(\frac{1+i}{1-i}\right) = f(i) = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{100} = i^{100} = 1$$

7. 이차방정식 $ax^2 + (a-3)x - 2a = 0$ 의 두 근의 차가 $\sqrt{17}$ 이 되도록 하는 상수 a 의 값들의 합은?

- ① $-\frac{9}{4}$ ② $-\frac{3}{4}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ $\frac{9}{4}$ ⑤ $\frac{11}{4}$

해설

$ax^2 + (a-3)x - 2a = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하면,

$$\alpha + \beta = -\frac{a-3}{a}, \quad \alpha\beta = -2$$

문제의 조건에서 $|\alpha - \beta| = \sqrt{17}$

$$\therefore 17 = (\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$$

$$= \left(\frac{a-3}{a}\right)^2 + 8$$

$$\therefore \left(\frac{a-3}{a}\right)^2 = 9, \quad 8a^2 + 6a - 9 = 0$$

따라서, a 의 값들의 합은 $-\frac{3}{4}$

8. $2x+y=a+2$, $x+2y=8(a+2)$ 를 만족하는 x, y 에 대하여 x^2+y^2 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$$2x+y=a+2 \cdots \textcircled{1}$$

$$x+2y=8(a+2) \cdots \textcircled{2}$$

$2 \times \textcircled{1} - \textcircled{2}$ 을 하면

$$3x = -6a - 12, \quad x = -2a - 4$$

$x = -2a - 4$ 를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$y = 5a + 10$$

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (-2a - 4)^2 + (5a + 10)^2 \\ &= 4a^2 + 16a + 16 + 25a^2 + 100a + 100 \\ &= 29a^2 + 116a + 116 \\ &= 29(a+2)^2 \end{aligned}$$

\therefore 최솟값 0

10. x 에 관한 두 개의 이차방정식 $x^2 + m^2x + n^2 - 2m = 0$, $x^2 - 2mx + n^2 + m^2 = 0$ 이 오직 하나의 공통근을 가지고, m, n 이 실수일 때, $m+n$ 의 값은? (단, 중근인 경우에는 두 개의 실근으로 본다.)

- ① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

두 방정식의 공통근을 α 라 하면
 $\alpha^2 + m^2\alpha + n^2 - 2m = 0 \dots$ ①
 $\alpha^2 - 2m\alpha + m^2 + n^2 = 0 \dots$ ②
 ① - ②하면
 $(m^2 + 2m)\alpha - (m^2 + 2m) = 0$
 $\therefore (m^2 + 2m)(\alpha - 1) = 0$
 $\therefore m^2 + 2m = 0$ 또는 $\alpha - 1 = 0$
 그런데 $m^2 + 2m = 0$ 일 때,
 곧, $m^2 = -2m$ 일 때에는 두 방정식이 일치하게 되므로 오직 하나의 공통근을 가진다는 문제의 뜻에 어긋난다.
 $\therefore \alpha = 1$
 이것을 ①에 대입하면
 $1 + m^2 + n^2 - 2m = 0 \quad \therefore (m-1)^2 + n^2 = 0$
 문제의 조건으로부터 m, n 은 실수이므로
 $m-1 = 0, n = 0$
 $\therefore m = 1, n = 0 \quad \therefore m + n = 1$