

1. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_6 + a_{11} + a_{15} + a_{20} = 32$ 일 때, $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{25}$ 의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 200

해설

a_n 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a + 5d + a + 10d + a + 14d + a + 19d = 32$$

$$\therefore 4a + 48d = 32$$

$$a + 12d = 8$$

$$\begin{aligned} S_{25} &= \frac{25 \cdot (2a + 24d)}{2} \\ &= \frac{25 \cdot 2 \cdot (a + 12d)}{2} \\ &= 25 \times 8 = 200 \end{aligned}$$

2. 제 3 항이 12이고 제 6 항이 -96인 등비수열의 일반항 a_n 을 구하면?

① $2 \cdot 3^{n-1}$

② $(-3) \cdot 2^{n-1}$

③ $3 \cdot (-2)^{n-1}$

④ $(-2) \cdot 3^{n-1}$

⑤ $2 \cdot (-3)^{n-1}$

해설

$$a_3 = ar^2 = 12$$

$$a_6 = ar^5 = -96$$

$$r^3 = -8$$

$$\therefore r = -2$$

$$ar^2 = 4a = 12 \quad \therefore a = 3$$

$$\therefore a_n = 3 \cdot (-2)^{n-1}$$

3. 두 수 $2p + 7$ 과 $2p + 9$ 의 등차중항이 p^2 일 때, 양수 p 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$2p + 7, p^2, 2p + 9$ 가 등차수열을 이루므로 $p^2 = \frac{(2p + 7) + (2p + 9)}{2}$

$2p^2 = 4p + 16, p^2 - 2p - 8 = 0$

$(p + 2)(p - 4) = 0$

따라서 $p = -2$ 또는 $p = 4$

이때, p 는 양수이므로 $p = 4$

4. 이차방정식 $x^2 - px + q = 0$ 이 서로 다른 두 실근 α, β 를 가질 때, 두 수 α, β 의 조화중항을 p, q 로 나타내면?

- ① $\frac{q}{p}$ ② $\frac{2q}{p}$ ③ $\frac{q}{2p}$ ④ $\frac{p}{q}$ ⑤ $\frac{2p}{q}$

해설

구하는 조화중항을 k 라 하면

$$k = \frac{2\alpha\beta}{\alpha + \beta}$$

이때, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해 $\alpha + \beta = p, \alpha \times \beta = q$

$$\frac{2\alpha\beta}{\alpha + \beta} = \frac{2q}{p}$$

5. 등차수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_1 = 6$, $a_5 = -2$ 일 때, $|a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots + |a_{20}|$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 284

해설

공차를 d 라 하면

$$a_5 = 6 + 4d = -2 \quad \therefore d = -2$$

$$\therefore a_n = 6 + (n-1) \times (-2) = -2n + 8$$

이때, $a_n \geq 0$ 에서 $-2n + 8 \geq 0$, 즉 $n \leq 4$ 이므로

$$|a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots + |a_{20}| = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 - (a_5 + a_6 + \cdots + a_{20})$$

$$= 2(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_{20}) = 2S_4 - S_{20}$$

$$= 2 \cdot \frac{4(6+0)}{2} - \frac{20(6-32)}{2} (\because a_4 = 0, a_{20} = -32)$$

$$= 24 + 260 = 284$$

6. $a_1 = 1$ 이고, 공비가 r 인 등비수열 $\{a_n\}$ 에서 m 이 짝수일 때, $a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{m-1} = 85$, $a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_m = 170$ 이다. 이때, $r + m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$m = 2k$ (k 는 자연수) 라고 하자.

$a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{2k-1}$ 은 공비가 r^2 인 등비수열이므로

$$a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{2k-1}$$

$$= \frac{a_1(r^{2k} - 1)}{r^2 - 1} = \frac{r^{2k} - 1}{r^2 - 1} = 85 \cdots \textcircled{A}$$

$$a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{2k}$$

$$= \frac{a_2(r^{2k} - 1)}{r^2 - 1} = 170 \cdots \textcircled{B}$$

$\textcircled{B} \div \textcircled{A}$ 을 하면 $r = 2$

이것을 $\textcircled{A}$ 에 대입하면

$$\frac{2^{2k} - 1}{3} = 85, \quad 2^{2k} = 256 = 2^8$$

따라서 $2k = m = 8$

$$r + m = 10$$

7. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 이 $S_n = 2 \cdot 3^n - 1$ 일 때, $a_1 + a_4$ 의 값은?

① 111 ② 112 ③ 113 ④ 114 ⑤ 115

해설

$$n = 1 \text{ 일 때, } a_1 = S_1 = 2 \cdot 3 - 1 = 5 \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

$$n \geq 2 \text{ 일 때, } a_n = S_n - S_{n-1} = 2 \cdot 3^n - 1 - (2 \cdot 3^{n-1} - 1) = 4 \cdot 3^{n-1} \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

그런데 $\textcircled{2}$ 에 $n = 1$ 을 대입하면 $\textcircled{1}$ 과 다르므로 이 수열은 제2항부터 등비수열을 이룬다.

$$\therefore a_n = 4 \cdot 3^{n-1} \quad (n \geq 2), \quad a_1 = 5$$

$$\therefore a_1 + a_4 = 5 + 4 \cdot 3^3 = 113$$

8. 수열 1, 101, 10101, 1010101, ... 에서 제100 항은?

- ① $\frac{10^{200} - 1}{99}$ ② $\frac{10^{202} - 1}{99}$ ③ $10^{201} - 1$
④ $\frac{10^{402} - 1}{99}$ ⑤ $10^{401} - 1$

해설

주어진 수열의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 10^2 + 1$$

$$a_3 = 10^4 + 10^2 + 1$$

$\vdots$

$$a_n = 10^{2(n-1)} + \cdots + 10^4 + 10^2 + 1$$

$$= \frac{1 \{ (10^2)^n - 1 \}}{10^2 - 1} = \frac{1}{99} (10^{2n} - 1)$$

$$\therefore a_{100} = \frac{1}{99} (10^{200} - 1)$$

9. 다음과 같은 군수열에 대하여 제1군에서 제10군 까지의 합은?

제1군	제2군	제3군	제4군
(1),	(1, 2),	(1, 2, 3),	(1, 2, 3, 4)...

- ① 200 ② 210 ③ 220 ④ 230 ⑤ 240

해설

제 n 군의 합을 a_n 이라 하면

$$a_n = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

따라서, 제 1군에서 제 10군까지의 합은

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} \frac{k(k+1)}{2} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{10} k(k+1) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{10} k^2 + \sum_{k=1}^{10} k \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} + \frac{10 \cdot 11}{2} \right) \\ &= 220 \end{aligned}$$

10. 다음과 같은 수열에서 (6, 4)는 몇 번째 항인가?

(1, 1), (1, 2), (2, 2), (1, 3), (2, 2), (3, 1),
(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1), (1, 5), (2, 4), ...

- ① 제40항

② 제41항

③

 제42항

④ 제43항

⑤ 제44항

해설

(합이 2인 순서쌍)= 1개, (합이 3인 순서쌍)= 2개, ... 합이 9
개인 순서쌍까지의 개수의 합을 모두 더하면, $1+2+\cdots+8=36$
이고, 합이 10인 순서쌍 중에서 (6, 4)는 여섯 번째이므로 42
번째이다.

11. $a_1 = 2$, $a_2 = 3$ 이고,
 $a_{2n+2} = a_{2n} + 1$, $a_{2n+1} = a_{2n-1} + 3$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)으로 정의된
수열 $\{a_n\}$ 에서 $\sum_{k=1}^{30} a_k$ 의 값은?

① 490 ② 495 ③ 500 ④ 505 ⑤ 510

해설

$a_{2n+2} = a_{2n} + 1$, $a_{2n+1} = a_{2n-1} + 3$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)에서 수열 $\{a_n\}$ 의 홀수 번째 항들은 첫째항이 2, 공차가 3인 등차수열이고, 짝수 번째 항들은 첫째항이 3, 공차가 1인 등차수열이다.

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{k=1}^{30} a_k &= (a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{29}) \\ &+ (a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{30}) \\ &= \frac{15(2 \cdot 2 + 14 \cdot 3)}{2} + \frac{15(2 \cdot 3 + 14 \cdot 1)}{2} \\ &= 495\end{aligned}$$

12. $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + 2^n (n = 1, 2, 3, \dots)$ 으로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 일반항 a_n 은?

① 2^{n-1}

② $2^{n-1} + n - 1$

③ $2^n - 1$

④ $2^n + n - 2$

⑤ $2^{n+1} - 3$

해설

$a_{n+1} = a_n + 2^n$ 의 양변에 $n = 1, 2, 3, \dots, (n-1)$ 을 대입하여
변끼리 더하면

$$a_2 = a_1 + 2$$

$$a_3 = a_2 + 2^2$$

$\vdots$

$$+) a_n = a_{n-1} + 2^{n-1}$$

$$a_n = a_1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1}$$

$$= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k$$

$$= 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1}$$

$$= \frac{2^n - 1}{2 - 1}$$

$$= 2^n - 1$$

13. 수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_{10} = 2^{50}$, $a_{n+1} = 2^n a_n (n = 1, 2, 3, \dots)$ 일 때, 이 수열의 첫째항은?

① 32 ② 64 ③ 128 ④ 256 ⑤ 512

해설

$a_{n+1} = 2^n a_n$ 에서 n 대신에 $1, 2, 3, \dots, n-1$ 을 차례로 대입하면

$$a_2 = 2^1 a_1$$

$$a_3 = 2^2 a_2$$

$$a_4 = 2^3 a_3$$

$\vdots$

$$a_n = 2^{n-1} a_{n-1}$$

이 등식들을 변끼리 곱하면

$$a_n = 2^1 \cdot 2^2 \cdots 2^3 \cdots 2^{n-1} \cdot a_1$$

$$\therefore a_n = 2^{1+2+3+\cdots+(n-1)} \cdot a_1 = a_1 \cdot 2^{\frac{(n-1)n}{2}}$$

$$a_{10} = 2^{50} \text{ 이므로 } 2^{50} = a_1 \cdot 2^{45}$$

$$a_1 = 2^5 = 32$$

14. $a_1 = 3, a_2 = 2, a_{n+2} = \frac{a_{n+1} + 1}{a_n} (n = 1, 2, 3, \dots)$ 로 정의되는 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\sum_{n=1}^{66} a_n$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 120

해설

$a_1 = 3, a_2 = 2, a_{n+2} = \frac{a_{n+1} + 1}{a_n} (n = 1, 2, 3, \dots)$ 이므로

$$a_3 = \frac{2+1}{3} = 1$$

$$a_4 = \frac{1+1}{2} = 1$$

$$a_5 = \frac{1+1}{1} = 2$$

$$a_6 = \frac{2+1}{1} = 3$$

$$a_7 = \frac{3+1}{2} = 2$$

⋮

$$\therefore a_1 = a_6 = a_{11} = \dots = 3$$

$$a_2 = a_7 = a_{12} = \dots = 2$$

$$a_3 = a_8 = a_{13} = \dots = 1$$

$$a_4 = a_9 = a_{14} = \dots = 1$$

$$a_5 = a_{10} = a_{15} = \dots = 2$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{66} a_n = 13(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5) + a_1$$

$$= 13 \times 9 + 3 = 120$$

15. 다음은 모든 자연수 n 에 대하여 $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2 \cdots \textcircled{㉠}$ 이 성립함을 수학적으로 증명한 것이다.

보기

(i) $n = 1$ 일 때, (좌변) = 1, (우변) = $1^2 = 1$ 이므로 $\textcircled{㉠}$ 이 성립한다.
(ii) $n = k$ 일 때, 등식이 성립한다고 가정하면 $1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) = k^2$
이 식의 양변에 $\boxed{(가)}$ 를 더하면
 $1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) + \boxed{(가)}$
 $= k^2 + \boxed{(가)} = \boxed{(나)}$
따라서, $n = k + 1$ 일 때에도 $\textcircled{㉠}$ 은 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 주어진 $\textcircled{㉠}$ 은 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나)에 알맞은 것은?

- ① $2k - 1, (k + 1)^2$

② $2k, k + 1$

③ $2k, (k + 1)^2$

④ $2k + 1, k + 1$

⑤ $2k + 1, (k + 1)^2$

해설

(ii) $n = k$ 일 때, 등식이 성립한다고 가정하면 $1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) = k^2$
이 식의 양변에 $\boxed{2k + 1}$ 를 더하면
 $1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) + \boxed{2k + 1}$
 $= k^2 + \boxed{2k + 1} = \boxed{(k + 1)^2}$
따라서, $n = k + 1$ 일 때에도 $\textcircled{㉠}$ 은 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 주어진 $\textcircled{㉠}$ 은 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.
 $\therefore (가) = 2k + 1, (나) = (k + 1)^2$

16. 첫째항부터 제 n 항까지의 합이 $S_n = n^2 + 3n + 1$ 인 수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n-1} = 221$ 을 만족하는 n 의 값은?

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

해설

(i) $n \geq 2$ 일 때,
 $a_n = S_n - S_{n-1}$
 $= (n^2 + 3n) - \{(n-1)^2 + 3(n-1)\} = 2n + 2$
(ii) $n = 1$ 일 때, $a_1 = S_1$ 이므로 $a_1 = 5$
(i), (ii) 에서 $\begin{cases} a_n = 2n + 2 (n \geq 2) \\ a_1 = 5 \end{cases}$
 $\therefore a_{2n-1} = 2(2n-1) + 2 = 4n \ (n \geq 2)$
 $\therefore a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{2n-1}$
 $= 5 + \frac{(n-1)(8+4n)}{2} = 2n^2 + 2n + 1$
 $2n^2 + 2n + 1 = 221$ 에서 $n = 10$ 또는 $n = -11$
그런데 $n \geq 1$ 이므로 $n = 10$

17. 월초에 200만원짜리 컴퓨터를 구입한 다음, 다음 달 초부터 12개월간 일정한 금액의 할부금을 지불하기로 하였다. 월이율 1%의 1개월마다의 복리로 계산할 때, 매달 갚아야 할 금액은? (단, $(1.01)^{12} = 1.13$ 으로 계산하고, 십 원 단위에서 반올림한다.)

- ① 172400 원 ② 173800 원 ③ 175200 원
④ 176800 원 ⑤ 177100 원

해설

(갚아야 할 금액) = 200 만 $\times 1.01^{12}$
매달 갚는 금액을 a 원이라 하면
첫째달의 a 원은 11 개월의 이자가 붙고,
둘째달의 a 원은 10 개월의 이자가 붙고,
⋮
마지막달의 a 원은 0 개월의 이자가 붙는다.
따라서 매달 갚는 금액의 원리합계는
첫째항이 a , 공비가 1.01 인 등비수열의
12 번째항까지의 합과 같다.
 $\therefore \frac{a(1.13 - 1)}{0.01} = \frac{0.13}{0.01}a$
 $13a = 200 \text{ 만} \times 1.13$
 $a = \frac{200 \times 1.13}{13} = 173846 \text{ 원}$
십의 자리에서 반올림하면 173800 원

18. 수열 $\sum_{k=1}^8 (2k-1) \cdot 2^{k-1}$ 의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3331

해설

$$S = 1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 5 \cdot 2^2 + \cdots + 13 \cdot 2^6 + 15 \cdot 2^7 \cdots \cdots \textcircled{A}$$

$$2S = 1 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2^3 + \cdots + 13 \cdot 2^7 + 15 \cdot 2^8 \cdots \cdots \textcircled{B}$$

이므로 $\textcircled{A} - \textcircled{B}$ 을 하면

$$-S = 2 \cdot \frac{(2^8 - 1)}{2 - 1} - 1 - 15 \cdot 2^8$$

$$\begin{aligned} S &= -2 \cdot 2^8 + 2 + 1 + 15 \cdot 2^8 \\ &= 13 \cdot 2^8 + 3 = 3331 \end{aligned}$$

19. 자연수 n 에 대하여 $1^n + 2^n + 3^n$ 을 10으로 나눈 나머지를 a_n 으로 정의하는 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

㉠ $a_2 + a_4 = 12$

㉡ $a_{n+1} = a_{n+5}$

㉢ $\sum_{k=1}^{102} a_k = 610$

① ㉡

② ㉢

③ ㉠, ㉡

④ ㉡, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $n = 2$ 일 때, $1^2 + 2^2 + 3^2$ 에서 일의 자리 수만 생각하면

$$1 + 4 + 9 = 14 \text{이므로 } a_2 = 4$$

$n = 4$ 일 때, $1^4 + 2^4 + 3^4$ 에서 일의 자리 수만 생각하면

$$1 + 6 + 1 = 8 \text{이므로 } a_4 = 8$$

$$\therefore a_2 + a_4 = 12(\text{참})$$

㉡ 1^n 의 일의 자리 수는 항상 1

$2, 2^2, 2^3, 2^4, \dots$ 의 일의 자리 수는 각각

$2, 4, 8, 6, 2, 4, \dots$

$3, 3^2, 3^3, 3^4, \dots$ 의 일의 자리 수는 각각

$3, 9, 7, 1, 3, 9, \dots$

따라서 1^{n+4} 과 1^n , 2^{n+4} 과 2^n , 3^{n+4} 과 3^n 의 일의 자리 수가 각각 같으므로

$$a_{n+1} = a_{n+5}(\text{참})$$

㉢ ㉡에서 $a_1 = 6, a_2 = 4, a_3 = 6, a_4 = 8, a_5 = 6, \dots$ 이고

$$102 = 4 \times 25 + 2 \text{이므로}$$

$$\sum_{k=1}^{102} a_k = (6 + 4 + 6 + 8) \times 25 + (6 + 4)$$

$$= 610(\text{참})$$

따라서 보기 중 옳은 것은 ㉠, ㉡, ㉢이다.