1. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_6 + a_{11} + a_{15} + a_{20} = 32$ 일 때, $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{25}$ 의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 200

해설

a_n 의 첫째항을 a, 공차를 d 라 하면

$a + 5d + a + 10d + a + 14d + a + 19d = 32$

$\therefore 4a + 48d = 32$

$a + 12d = 8$

$$S_{25} = \frac{25 \cdot (2a + 24d)}{2} = \frac{25 \cdot 2 \cdot (a + 12d)}{2} = 25 \times 8 = 200$$

2. 제 3항이 12이고 제 6항이 -96인 등비수열의 일반항 a_n을 구하면?

① $2 \cdot 3^{n-1}$ ② $(-3) \cdot 2^{n-1}$ ③ $3 \cdot (-2)^{n-1}$

④ $(-2) \cdot 3^{n-1}$ ⑤ $2 \cdot (-3)^{n-1}$

해설

$a_3 = ar^2 = 12$

$a_6 = ar^5 = -96$

$r^3 = -8$

$\therefore r = -2$

$ar^2 = 4a = 12 \quad \therefore a = 3$

$\therefore a_n = 3 \cdot (-2)^{n-1}$

3. 두 수 $2p+7$과 $2p+9$의 등차중항이 p^2일 때, 양수 p의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$2p+7$, p^2, $2p+9$가 등차수열을 이루므로 $p^2 = \dfrac{(2p+7)+(2p+9)}{2}$

$2p^2 = 4p+16$, $p^2-2p-8=0$

$(p+2)(p-4)=0$

따라서 $p=-2$ 또는 $p=4$

이때, p는 양수이므로 $p=4$

4. 이차방정식 $x^2 - px + q = 0$이 서로 다른 두 실근 α, β를 가질 때, 두 수 α, β의 조화중항을 p, q로 나타내면?

① $\dfrac{q}{p}$ ② $\dfrac{2q}{p}$ ③ $\dfrac{q}{2p}$ ④ $\dfrac{p}{q}$ ⑤ $\dfrac{2p}{q}$

해설

구하는 조화중항을 k라 하면

$$k = \frac{2\alpha\beta}{\alpha + \beta}$$

이때, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해 $\alpha+\beta = p$, $\alpha\times\beta = q$

$$\frac{2\alpha\beta}{\alpha + \beta} = \frac{2q}{p}$$

5. 등차수열 $\{a_n\}$에서 $a_1 = 6,\ a_5 = -2$일 때, $|a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots + |a_{20}|$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 284

해설

공차를 d라 하면

$a_5 = 6 + 4d = -2 \quad \therefore\ d = -2$

$\therefore\ a_n = 6 + (n-1) \times (-2) = -2n + 8$

이때, $a_n \geq 0$에서 $-2n + 8 \geq 0$, 즉 $n \leq 4$이므로

$|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_{20}| = a_1+a_2+a_3+a_4-(a_5+a_6+\cdots+a_{20})$

$= 2(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_{20}) = 2S_4 - S_{20}$

$= 2 \cdot \dfrac{4(6+0)}{2} - \dfrac{20(6-32)}{2} (\because\ a_4 = 0,\ a_{20} = -32)$

$= 24 + 260 = 284$

6. $a_1 = 1$이고, 공비가 r인 등비수열 $\{a_n\}$에서 m이 짝수일 때, $a_1 + a_3 + a_5 + \cdots a_{m-1} = 85$, $a_2 + a_4 + a_6 + \cdots a_m = 170$이다. 이때, $r + m$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$m = 2k$(k는 자연수)라고 하자.

$a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{2k-1}$은 공비가 r^2인 등비수열이므로

$a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{2k-1}$

$= \dfrac{a_1(r^{2k}-1)}{r^2-1} = \dfrac{r^{2k}-1}{r^2-1} = 85 \cdots ㉠$

$a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{2k}$

$= \dfrac{a_2(r^{2k}-1)}{r^2-1} = 170 \cdots ㉡$

㉡÷㉠을 하면 $r = 2$

이것을 ㉠에 대입하면

$\dfrac{2^{2k}-1}{3} = 85,\ 2^{2k} = 256 = 2^8$

따라서 $2k = m = 8$

$r + m = 10$

7. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 $S_n = 2 \cdot 3^n - 1$일 때, $a_1 + a_4$의 값은?

① 111 ② 112 ③ 113 ④ 114 ⑤ 115

해설

$n = 1$일 때, $a_1 = S_1 = 2 \cdot 3 - 1 = 5$ ······ ㉠

$n \geq 2$일 때, $a_n = S_n - S_{n-1} = 2 \cdot 3^n - 1 - (2 \cdot 3^{n-1} - 1) = 4 \cdot 3^{n-1}$ ······ ㉡

그런데 ㉡에 $n = 1$을 대입하면 ㉠과 다르므로 이 수열은 제2항부터 등비수열을 이룬다.

$\therefore a_n = 4 \cdot 3^{n-1}$ $(n \geq 2)$, $a_1 = 5$

$\therefore a_1 + a_4 = 5 + 4 \cdot 3^3 = 113$

8. 수열 1, 101, 10101, 1010101, $\cdots$ 에서 제100항은?

① $\dfrac{10^{200}-1}{99}$ ② $\dfrac{10^{202}-1}{99}$ ③ $10^{201}-1$

④ $\dfrac{10^{402}-1}{99}$ ⑤ $10^{401}-1$

해설

주어진 수열의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 10^2 + 1$$

$$a_3 = 10^4 + 10^2 + 1$$

$$\vdots$$

$$a_n = 10^{2(n-1)} + \cdots + 10^4 + 10^2 + 1$$

$$= \frac{1\left\{(10^2)^n - 1\right\}}{10^2 - 1} = \frac{1}{99}(10^{2n} - 1)$$

$$\therefore\ a_{100} = \frac{1}{99}(10^{200} - 1)$$

9. 다음과 같은 군수열에 대하여 제1군에서 제10군 까지의 합은?

제1군	제2군	제3군	제4군
(1),	(1, 2),	(1, 2, 3),	(1, 2, 3, 4) $\cdots$

① 200 ② 210 ③ 220 ④ 230 ⑤ 240

해설

제n군의 합을 a_n이라 하면

$$a_n = 1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

따라서, 제 1군에서 제 10군까지의 합은

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10} \frac{k(k+1)}{2} &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{10} k(k+1)\\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{10} k^2 + \sum_{k=1}^{10} k\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{10\cdot 11\cdot 21}{6} + \frac{10\cdot 11}{2}\right)\\ &= 220\end{aligned}$$

10. 다음과 같은 수열에서 $(6,\ 4)$는 몇 번째 항인가?

$(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (2,\ 2),\ (1,\ 3),\ (2,\ 2),\ (3,\ 1),$ $(1,\ 4),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2),\ (4,\ 1),\ (1,\ 5),\ (2,\ 4),\ \cdots$

① 제40항　② 제41항　③ 제42항

④ 제43항　⑤ 제44항

해설

(합이 2인 순서쌍)$=1$개, (합이 3인 순서쌍)$=2$개, $\cdots$ 합이 9개인 순서쌍까지의 개수의 합을 모두 더하면, $1+2+\cdots+8=36$이고, 합이 10인 순서쌍 중에서 $(6,\ 4)$는 여섯 번째이므로 42번째이다.

11. $a_1 = 2,\ a_2 = 3$이고,

$a_{2n+2} = a_{2n} + 1,\ a_{2n+1} = a_{2n-1} + 3(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에서 $\sum_{k=1}^{30} a_k$의 값은?

① 490　② 495　③ 500　④ 505　⑤ 510

해설

$a_{2n+2} = a_{2n} + 1,\ a_{2n+1} = a_{2n-1} + 3(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$에서 수열 $\{a_n\}$의 홀수 번째 항들은 첫째항이 2, 공차가 3인 등차수열이고, 짝수 번째 항들은 첫째항이 3, 공차가 1인 등차수열이다.

$\therefore\ \sum_{k=1}^{30} a_k = (a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{29})$

$+(a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{30})$

$= \dfrac{15(2 \cdot 2 + 14 \cdot 3)}{2} + \dfrac{15(2 \cdot 3 + 14 \cdot 1)}{2}$

$= 495$

12. $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + 2^n (n = 1, 2, 3, \cdots)$으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에 대하여 일반항 a_n은?

① 2^{n-1} ② $2^{n-1} + n - 1$ ③ $2^n - 1$

④ $2^n + n - 2$ ⑤ $2^{n+1} - 3$

해설

$a_{n+1} = a_n + 2^n$의 양변에 $n = 1, 2, 3, \cdots, (n-1)$을 대입하여 변끼리 더하면

$$
\begin{aligned}
a_2 &= a_1 + 2 \\
a_3 &= a_2 + 2^2 \\
&\vdots \\
+)\ \underline{a_n} &\underline{= a_{n-1} + 2^{n-1}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a_n &= a_1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} \\
&= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k \\
&= 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} \\
&= \frac{2^n - 1}{2 - 1} \\
&= 2^n - 1
\end{aligned}
$$

13. 수열 $\{a_n\}$에서 $a_{10} = 2^{50}$, $a_{n+1} = 2^n a_n (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$일 때, 이 수열의 첫째항은?

① 32 ② 64 ③ 128 ④ 256 ⑤ 512

해설

$a_{n+1} = 2^n a_n$에서 n대신에 $1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n-1$을 차례로 대입하면

$a_2 = 2^1 a_1$

$a_3 = 2^2 a_2$

$a_4 = 2^3 a_3$

$\vdots$

$a_n = 2^{n-1} a_{n-1}$

이 등식들을 변끼리 곱하면

$a_n = 2^1 \cdot 2^2 \cdots 2^3 \cdots 2^{n-1} \cdot a_1$

$\therefore\ a_n = 2^{1+2+3+\cdots+(n-1)} \cdot a_1 = a_1 \cdot 2^{\frac{(n-1)n}{2}}$

$a_{10} = 2^{50}$이므로 $2^{50} = a_1 \cdot 2^{45}$

$a_1 = 2^5 = 32$

14. $a_1 = 3,\ a_2 = 2,\ a_{n+2} = \dfrac{a_{n+1}+1}{a_n}(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$로 정의되는 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{66} a_n$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 120

해설

$a_1 = 3,\ a_2 = 2,\ a_{n+2} = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$이므로

$$a_3 = \frac{2+1}{3} = 1$$

$$a_4 = \frac{1+1}{2} = 1$$

$$a_5 = \frac{1+1}{1} = 2$$

$$a_6 = \frac{2+1}{1} = 3$$

$$a_7 = \frac{3+1}{2} = 2$$

$\vdots$

$\therefore\ a_1 = a_6 = a_{11} = \cdots = 3$

$a_2 = a_7 = a_{12} = \cdots = 2$

$a_3 = a_8 = a_{13} = \cdots = 1$

$a_4 = a_9 = a_{14} = \cdots = 1$

$a_5 = a_{10} = a_{15} = \cdots = 2$

$\therefore\ \sum_{n=1}^{66} a_n = 13(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5) + a_1$

$= 13 \times 9 + 3 = 120$

15. 다음은 모든 자연수 n에 대하여 $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2 \cdots$ ㉠ 이 성립함을 수학적으로 증명한 것이다.

보기

(i) $n=1$일 때, (좌변)$=1$, (우변)$=1^2=1$이므로 ㉠이 성립한다.
(ii) $n=k$일 때, 등식이 성립한다고 가정하면 $1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2$
이 식의 양변에 $\boxed{(가)}$를 더하면
$1+3+5+\cdots+(2k-1)+\boxed{(가)}$
$=k^2+\boxed{(가)}=\boxed{(나)}$
따라서, $n=k+1$일 때에도 ㉠은 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 주어진 ㉠은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나)에 알맞은 것은?

① $2k-1,\ (k+1)^2$
② $2k,\ k+1$
③ $2k,\ (k+1)^2$
④ $2k+1,\ k+1$
⑤ $2k+1,\ (k+1)^2$

해설

(ii) $n=k$일 때, 등식이 성립한다고 가정하면 $1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2$

이 식의 양변에 $\boxed{2k+1}$를 더하면

$1+3+5+\cdots+(2k-1)+\boxed{2k+1}$

$=k^2+\boxed{2k+1}=\boxed{(k+1)^2}$
따라서, $n=k+1$일 때에도 ㉠은 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 주어진 ㉠은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.
$\therefore$ (가) $=2k+1$, (나) $=(k+1)^2$

16. 첫째항부터 제 n항까지의 합이 $S_n = n^2 + 3n + 1$인 수열 $\{a_n\}$에서 $a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n-1} = 221$을 만족하는 n의 값은?

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

해설

(i) $n \geq 2$일 때,

$a_n = S_n - S_{n-1}$

$= (n^2 + 3n) - \{(n-1)^2 + 3(n-1)\} = 2n + 2$

(ii) $n = 1$일 때, $a_1 = S_1$이므로 $a_1 = 5$

(i), (ii)에서 $\begin{cases} a_n = 2n + 2 (n \geq 2) \\ a_1 = 5 \end{cases}$

$\therefore\ a_{2n-1} = 2(2n-1) + 2 = 4n\ (n \geq 2)$

$\therefore\ a_1 + a_3 + a_5 + \cdots a_{2n-1}$

$= 5 + \dfrac{(n-1)(8+4n)}{2} = 2n^2 + 2n + 1$

$2n^2 + 2n + 1 = 221$에서 $n = 10$ 또는 $n = -11$

그런데 $n \geq 1$이므로 $n = 10$

17. 월초에 200만원짜리 컴퓨터를 구입한 다음, 다음 달 초부터 12개월간 일정한 금액의 할부금을 지불하기로 하였다. 월이율 1%의 1개월마다의 복리로 계산할 때, 매달 갚아야 할 금액은? (단, $(1.01)^{12} = 1.13$으로 계산하고, 십 원 단위에서 반올림한다.)

① 172400원 ② 173800원 ③ 175200원

④ 176800원 ⑤ 177100원

해설

(갚아야 할 금액)= 200만 $\times 1.01^{12}$

매달 갚는금액을 a원이라 하면

첫째달의 a원은 11개월의 이자가 붙고,

둘째달의 a원은 10개월의 이자가 붙고,

⋮

마지막달의 a원은 0개월의 이자가 붙는다.

따라서 매달 갚는 금액의 원리합계는

첫째항이 a, 공비가 1.01인 등비수열의

12번째항까지의 합과 같다.

$$\therefore \frac{a(1.13-1)}{0.01} = \frac{0.13}{0.01}a$$

$13a = 200$만$\times 1.13$

$$a = \frac{200 \times 1.13}{13} = 173846\text{원}$$

십의 자리에서 반올림하면 173800원

18. 수열$\sum_{k=1}^{8}(2k-1)\cdot 2^{k-1}$ 의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3331

해설

$S\ = 1\cdot 1 + 3\cdot 2 + 5\cdot 2^2 + \cdots + 13\cdot 2^6 + 15\cdot 2^7 \cdots\cdots$ ㉠

$2S\ = 1\cdot 2 + 3\cdot 2^2 + 5\cdot 2^3 + \cdots + 13\cdot 2^7 + 15\cdot 2^8 \cdots\cdots$ ㉡

이므로 ㉠ - ㉡을 하면

$$-S\ = 2\cdot\frac{(2^8-1)}{2-1} - 1 - 15\cdot 2^8$$

$$S\ = -2\cdot 2^8 + 2 + 1 + 15\cdot 2^8$$

$$= 13\cdot 2^8 + 3 = 3331$$

19. 자연수 n에 대하여 $1^n + 2^n + 3^n$을 10으로 나눈 나머지를 a_n으로 정의하는 수열 $\{a_n\}$에 대하여 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

ㄱ $a_2 + a_4 = 12$

ㄴ $a_{n+1} = a_{n+5}$

ㄷ $\sum_{k=1}^{102} a_k = 610$

① ㄴ
② ㄷ
③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해설

ㄱ $n = 2$일 때, $1^2 + 2^2 + 3^2$에서 일의 자리 수만 생각하면
$1 + 4 + 9 = 14$이므로 $a_2 = 4$
$n = 4$일 때, $1^4 + 2^4 + 3^4$에서 일의 자리 수만 생각하면
$1 + 6 + 1 = 8$이므로 $a_4 = 8$
$\therefore\ a_2 + a_4 = 12$(참)

ㄱ 1^n의 일의 자리 수는 항상 1
$2,\ 2^2,\ 2^3,\ 2^4,\ \cdots$의 일의 자리 수는 각각
$2,\ 4,\ 8,\ 6,\ 2,\ 4,\ \cdots$
$3,\ 3^2,\ 3^3,\ 3^4,\ \cdots$의 일의 자리 수는 각각
$3,\ 9,\ 7,\ 1,\ 3,\ 9,\ \cdots$
따라서 1^{n+4}과 1^n, 2^{n+4}과 2^n, 3^{n+4}과 3^n의 일의 자리 수가 각각 같으므로
$a_{n+1} = a_{n+5}$(참)

ㄷ ㄴ에서 $a_1 = 6,\ a_2 = 4,\ a_3 = 6,\ a_4 = 8,\ a_5 = 6,\ \cdots$이고
$102 = 4 \times 25 + 2$이므로
$$\sum_{k=1}^{102} a_k = (6+4+6+8) \times 25 + (6+4) = 610\text{(참)}$$
따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.