1. 두 점 A(1, 2), B(−3, 4) 를 지나는 직선에 평행하고 y 절편이 −1 인 직선의 방정식은 $y = ax + b$ 이다. 이 때, $a + b$ 의 값은 ?

① −2　② $-\frac{3}{2}$　③ 0　④ $\frac{3}{2}$　⑤ 2

해설

직선 $y = ax + b$ 는 두 점 A(1, 2), B(−3, 4) 를 지나는 직선에 평행하므로 기울기는 같다.

$$\therefore\ a = \frac{2-4}{1-(-3)} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

또, y 절편이 −1 이므로 $b = -1$

$$\therefore\ a + b = -\frac{1}{2} + (-1) = -\frac{3}{2}$$

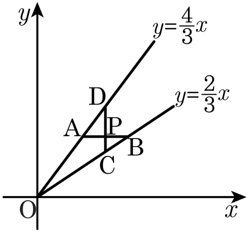
2. 일차함수 $y=(a-2)x+b+2$ 의 그래프가 x 축의 양의 방향과 45^o 의 각을 이루고, y 절편이 5 일 때, $a+b$ 의 값을 구하면? (단, a, b 는 상수)

① 0 ② 3 ③ 6 ④ -6 ⑤ -3

해설

$y=(a-2)x+b+2$ 의 그래프가
x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가
$45°$ 이므로
$a-2=\tan 45°=1$ 에서 $a=3$
또, y 절편이 5 이므로
$b+2=5$ 에서 $b=3$
$\therefore\ a+b=6$

3. 직선 $y=\frac{4}{3}x$ 와 $y=\frac{2}{3}x$ 사이에 위치한 제 1 사분면의 점 P 에서 x 축, y 축에 각각 평행한 선분을 그어 위의 두 직선과 만나는 점을 그림에서와 같이 각각 A, B, C, D 라 하자. 이 때, $\frac{\overline{AP}\cdot\overline{BP}}{\overline{CP}\cdot\overline{DP}}$ 의 값은?



① $\frac{1}{2}$
② $\frac{8}{9}$
③ $\frac{9}{8}$
④ $\frac{9}{2}$
⑤ P 의 위치에 따라 일정하지 않다.

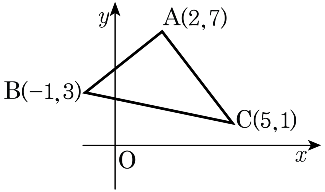
해설

직선 $y=\frac{4}{3}x$ 의 기울기에서 $\frac{\overline{DP}}{\overline{AP}}=\frac{4}{3}$

직선 $y=\frac{2}{3}x$ 의 기울기에서 $\frac{\overline{CP}}{\overline{BP}}=\frac{2}{3}$

$\therefore \frac{\overline{AP}\cdot\overline{BP}}{\overline{CP}\cdot\overline{DP}}=\frac{\overline{AP}}{\overline{DP}}\cdot\frac{\overline{BP}}{\overline{CP}}=\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{2}=\frac{9}{8}$

4. 세 점 $A(2,\ 7), B(-1\ ,3), C(5,\ 1)$을 꼭지점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심을 G라 할 때, 다음 중 두 점 A, G를 지나는 직선의 방정식은?



① $x-y-2=0$ ② $x+y-2=0$ ③ $x-2=0$

④ $3x-y+1=0$ ⑤ $4x+y-1=0$

해설

두 점 A, G를 지나는 직선은 $\overline{BC}$ 의 중점을 지나므로
점A와 $\overline{BC}$의 중점을 지나는 직선의 방정식을 구하면 된다.
$\overline{BC}$의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-1+5}{2}, \frac{3+1}{2}\right)$$

따라서, 두 점$(2,\ 7)$ 과$(2,\ 2)$를 지나는 직선의 방정식은 $x=2$ 이다.

5. 곡선 $y=x^3$ 위의 서로 다른 세 점 A, B, C 의 x좌표를 각각 a, b, c 라고 한다. 세 점 A, B, C 가 일직선 위에 있을 때, 다음 중 항상 성립하는 것은?

① $a+b+c=0$ ② $a+b+c=1$ ③ $abc=1$

④ $a+c=2b$ ⑤ $ac=b^2$

해설

서로 다른 세 점 $\mathrm{A}(a, a^3)$, $\mathrm{B}(b, b^3)$, $\mathrm{C}(c, c^3)$ 이 일직선 위에 있으므로 직선 AB 의 기울기와 직선 AC 의 기울기는 같다.

$$\therefore \frac{b^3-a^3}{b-a}=\frac{c^3-a^3}{c-a}$$

즉, $b^2+ab+a^2=c^2+ac+a^2$

$(b-c)(a+b+c)=0$ 에서 $b \neq c$ 이므로

$a+b+c=0$

6. $ab < 0,\ ac > 0$일 때, 직선 $ax+by+c=0$이 지나지 <u>않는</u> 사분면은?

① 제 1, 2 사분면 ② 제 1, 3 사분면 ③ 제 2, 4 사분면

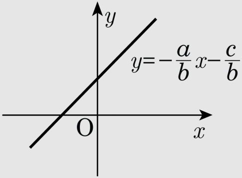
④ 제 2 사분면 ⑤ 제 4 사분면

해설

$ab < 0,\ ac > 0$이므로 $b \neq 0$ 이다.

따라서, 주어진 직선의 방정식을 b로 나누어 정리하면

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$



$$(\text{기울기}) = -\frac{a}{b} > 0$$

한편, $ab < 0,\ ac > 0$이므로

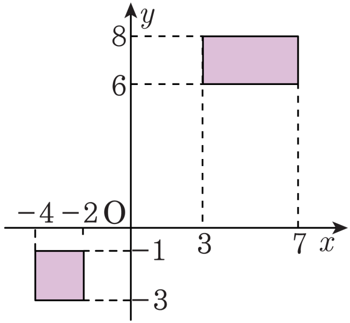
$$ab \cdot ac = a^2bc < 0$$

따라서 $bc < 0$

$$(y\ \text{절편}) = -\frac{c}{b} > 0$$

따라서, 주어진 직선은 제 1, 2, 3 사분면을 지나고 제4 사분면은 지나지 않는다.

7. 다음 그림과 같이 좌표평면 위에 정사각형과 직사각형이 놓여 있다. 이 정사각형과 직사각형의 넓이를 동시에 이등분하는 직선의 기울기는?



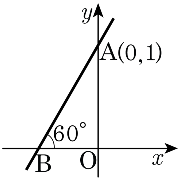
① $\frac{9}{10}$ ② $\frac{9}{8}$ ③ $\frac{8}{7}$ ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ 1

해설

직사각형 ABCD 에서 두 대각선의 교점을 M이라 하자.
점 M을 지나는 임의의 직선 l 이 직사각형과 만나는 점을 각각 P, Q 라 하면
l 의 기울기에 관계없이 $\triangle BMQ = \triangle DMP$ 이므로,
M을 지나는 임의의 직선은 직사각형의 넓이를 이등분한다.
정사각형의 두 대각선의 교점의 좌표는 $(-3, -2)$
직사각형의 두 대각선의 교점의 좌표는 $(5, 7)$ 이므로
두 점을 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{7-(-2)}{5-(-3)} = \frac{9}{8}$$

8. 다음 그림과 같이 점 A(0, 1) 을 지나는 직선 l 이 x 축의 양의 방향과 60° 를 이루고 x 축과 점 B 에서 만날 때, 점 B 의 좌표는?



① $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ ② $(-1, 0)$ ③ $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$
④ $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right)$ ⑤ $\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$

해설

직선 l 이 x 축의 양의 방향과 60° 를 이루므로
직선 l 의 기울기는 $\tan 60° = \sqrt{3}$
또한 직선 l 은 점 A(0, 1) 을 지나므로
$y-1=\sqrt{3}(x-0)$
$\therefore y=\sqrt{3}x+1$
이 직선이 x 축과 만나는 점 B 는 y 좌표가 0 이므로
$0=\sqrt{3}x+1$
$$\therefore x=-\frac{1}{\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$
$$\therefore B\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\ 0\right)$$

9. 점 (0, 2) 를 지나고 x 축의 양의 방향과 이루는 각이 $30°$ 인 직선의 방정식은?

① $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+2$ ② $y=x+2$ ③ $y=2x+2$
④ $y=x+3$ ⑤ $y=x+4$

해설

기울기 $m=\tan 30°=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 이고

점 (0, 2) 를 지나므로,

$y-2=\frac{\sqrt{3}}{3}(x-0)$

$\therefore\ y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+2$

10. 직선 l 이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 할 때, 두 점 A, B의 중점 M의 좌표는 $(2,\ 3)$이다. 이 때, 직선 l의 방정식은?

① $y=-2x+2$ ② $y=-\frac{3}{2}x+3$ ③ $y=-\frac{2}{3}x+2$

④ $y=-\frac{3}{2}x+6$ ⑤ $y=\frac{2}{3}x+6$

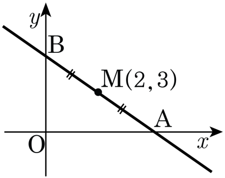
해설

A, B의 중점이 $(2,\ 3)$이므로

$A(4,\ 0)$, $B(0,\ 6)$ 직선 l의 x절편이 4 , y절편이 6 이므로

직선의 방정식은 $\frac{x}{4}+\frac{y}{6}+1$이다.

$\therefore\ y=-\frac{3}{2}x+6$



11. 직선 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=2$ 와 x 축 및 y 축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이가 12 일 때, ab 의 값은? (단, $a>0,\ b>0$)

① 3　　② 4　　③ 6　　④ 12　　⑤ 24

해설

직선 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=2$ 에서 $\dfrac{x}{2a}+\dfrac{y}{2b}=1$ 이므로 x 절편은 $2a$, y 절편은 $2b$ 이다.

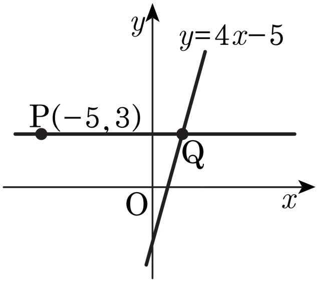
이 때, $a,\ b$ 가 양수이므로

직선 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=2$ 와 x 축 및 y 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times 2a\times 2b=2ab=12$$

$\therefore\ ab=6$

12. 다음 그림과 같이 좌표평면 위의 점 $P(-5, 3)$을 지나고 x축에 평행한 직선이 일차함수 $y = 4x - 5$ 의 그래프와 만나는 점을 Q 라 한다. $\overline{PQ}$ 의 길이는?



① 6　　② $\frac{13}{2}$　　③ 7　　④ $\frac{15}{2}$　　⑤ 8

해설

점 P 를 지나고 x축에 평행한 직선의 방정식은 $y = 3$ 이다.
점 Q의 y좌표가 3이므로
$y = 4x - 5$에 $y = 3$을 대입하면 $3 = 4x - 5$
$\therefore x = 2$
따라서 점 Q의 좌표는 $(2,\ 3)$ 이다.
$\therefore \overline{PQ} = 2 - (-5) = 7$

13. 세 점 $A(3,\ a)$, $B(2,\ 1)$, $C\ (a+4,\ 2)$이 일직선 위에있을 때, 실수 a의 값들의 곱은?

① -3　　② -2　　③ -1　　④ 0　　⑤ 1

해설

세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으면

$\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$의 기울기는 같다.

$\overline{AB}$의 기울기와 $\overline{BC}$의 기울기가 같으므로

$$\frac{1-a}{2-3} = \frac{2-1}{(a+4)-2},\quad \frac{a-1}{1} = \frac{1}{a+2}$$

$$(a-1)\cdot(a+2) = 1,\ a^2+a-3=0$$

$\therefore$ 실수 a의 값의 곱은 -3

14. 상수 a, b, c가 조건 $ab > 0$, $bc < 0$을 만족시킬 때 방정식 $ax+by-c=0$이 나타내는 그래프가 지나는 사분면을 모두 고르면?

① 제 1, 2, 3 사분면
② 제 2, 3, 4 사분면
③ 제 1, 3, 4 사분면
④ 제 1, 2 사분면
⑤ 제 2, 3 사분면

해설

$$ax+by-c=0 \Rightarrow \quad y=-\frac{a}{b}x+\frac{c}{b}$$

$ab>0$, $bc<0$이므로

기울기는 $(-)$, y절편은 $(-)$이다.

$\therefore$ 제 2, 3, 4사분면을 지난다.

15. x, y에 관한 이차방정식 $2x^2-3xy+ay^2-2x+9y+b=0$이 직교하는 두 직선의 곱을 나타낼 때, ab를 구하면?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

준식이 나타내는 두 직선을

$px+qy+r=0 \cdots$ ㉠ ,

$p'x+q'y+r'=0 \cdots$ ㉡이라 하자.

㉠과 ㉡은 서로 직교하므로

$pp'+qq'=0$이다.

(준식)$=(px+qy+r)(p'x+q'y+r')=0$의

전개식에서 x^2의 계수와 y^2의 계수의 합은

$pp'+qq'$이므로 $a+2=pp'+qq'=0$

$\therefore\ a=-2$

$a=-2$를 준식에 대입하여 정리하면

(준식)

$=2x^2-(3y+2)x+(-2y^2+9y+b)=0 \cdots$ ㉢

㉢이 두 직선의 곱을 나타내므로

㉢의 판별식 $D_1=(3y+2)^2-8(-2y^2+9y+b)$

$=25y^2-60y+(4-8b) \cdots$ ㉣이 완전제곱식이다.

따라서 ㉣의 판별식 $\frac{D_2}{4}$는 0이다.

$\frac{D_2}{4}=30^2-25(4-8b)=0$

$\therefore\ b=-4$

$\therefore\ ab=(-2)\cdot(-4)=8$