**1.** $(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)+a$가 이차식의 완전제곱이 되도록 $a$의 값을 정하면?

① 4 ② 8 ③ 12 ④ 15 ⑤ 16

해설

(준식)$=(x^2-8x+7)(x^2-8x+15)+a$

여기서, $x^2-8x+7=X$로 놓으면

(준식) $=X(X+8)+a$

$=X^2+8X+a=(X+4)^2+a-16$

따라서 $a=16$

**2.** 다음 식의 분모를 0으로 만들지 않는 모든 실수 $x$에 대하여 다음 식이 성립할 때, $a_1 + a_2 + \cdots + a_{10}$의 값은?

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)\cdots(x-10)} = \frac{a_1}{x-1} + \frac{a_2}{x-2} + \cdots + \frac{a_{10}}{x-10}$$

① 0　　② $-1$　　③ 1　　④ $-10$　　⑤ 10

해설

우변을 통분하여 $x$에 대한 내림차순으로 정리하면,

$$(\text{우변}) = \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_{10})x^9 + \cdots}{(x-1)(x-2)\cdots(x-10)}$$

양변의 계수를 비교하면

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{10} = 0$$

**3.** 다음 다항식의 일차항의 계수는?

$$(1+x+x^2)^2(1+x)+(1+x+x^2+x^3)^3$$

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

i ) $(1+x+x^2)^2(x+1)$ 의 일차항의 계수

: $(1+x+x^2)^2$ 의 일차항에 1을 곱할 때,

계수$=2$

: $(1+x+x^2)^2$ 의 상수항에 $x$를 곱할 때,

계수$=1$

ii ) $(1+x+x^2+x^3)^3$ 의 일차항의 계수

$x+x^2+x^3=Y$라 하면,

$(Y+1)^3=Y^3+3Y^2+3Y+1$

$3Y=3x+3x^2+3x^3$

일차항의 계수$=3$, 다른 항에는 일차항이 없다.

i ), ii ) 에서 $2+1+3=6$

**4.** 삼각형의 세 변의 길이 $a$, $b$, $c$에 대하여 $(a+b-c)(a-b+c)=b(b+2c)+(c+a)(c-a)$가 성립할 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① 직각삼각형 ② 이등변삼각형 ③ 정삼각형
④ 예각삼각형 ⑤ 둔각삼각형

**해설**

$(a+b-c)(a-b+c)=b(b+2c)+(c+a)(c-a)$에서

$\{a+(b-c)\}\{a-(b-c)\}=b^2+2bc+c^2-a^2$

$a^2-(b-c)^2=-a^2+b^2+c^2+2bc$

$2a^2=2b^2+2c^2$

$\therefore\ a^2=b^2+c^2$

따라서, 이 삼각형은 빗변의 길이가 $a$인 직각삼각형이다.

**5.** $x^2 + \frac{1}{x^2} = 14(x > 0)$ 일 때, $x^3 + \frac{1}{x^3}$ 의 값은?

① 36　　② 44　　③ 52　　④ 68　　⑤ 82

해설

$x^2 + \frac{1}{x^2} = (x + \frac{1}{x})^2 - 2$ 이므로

$x + \frac{1}{x} = 4 \ (\because x > 0)$

$x^3 + \frac{1}{x^3} = (x + \frac{1}{x})^3 - 3(x + \frac{1}{x}) = 52$

**6.** $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$ 이고 $abc=1$ 일 때, $(a^3+b^3+c^3)^2$ 의 값을 계산하면?

① 1　② 4　③ 9　④ 16　⑤ 25

해설

$a^3+b^3+c^3$
$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$
$=(a+b+c)\times 0+3abc=0+3\cdot(1)=3$
$\therefore (a^3+b^3+c^3)^2=9$

해설

$a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$ $a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)=0$
$\frac{1}{2}\left(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right\}=0$
$\therefore a=b=c\rightarrow abc=a^3=b^3=c^3=1$
$(a^3+b^3+c^3)^2=(1+1+1)^2=9$

**7.** 대각선의 길이가 28이고, 모든 모서리의 길이의 합이 176인 직육면체의 겉넓이를 구하려 할 때, 다음 중에서 사용되는 식은?

① $(x-a)(x-b)(x-c)$
$= x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x - abc$

② $\dfrac{1}{2}\{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\}$
$= a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$

③ $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

④ $(x+a)(x+b)(x+c)$
$= x^3 + (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x + abc$

⑤ $(a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$
$= a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

해설

직육면체의 가로의 길이, 세로의 길이, 높이를
각각 $a$, $b$, $c$라 하면 대각선의 길이는
$\sqrt{a^2+b^2+c^2} = 28$
$\therefore\ a^2+b^2+c^2 = 28^2 \cdots$ ㉠
또, 모든 모서리의 길이의 합은 176이므로
$4(a+b+c) = 176$
$\therefore\ a+b+c = 44 \cdots$ ㉡
이 때, 직육면체의 겉넓이는 $2(ab+bc+ca)$이므로
$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca) \cdots$ ㉢
따라서 ㉠, ㉡을 ㉢에 대입하여 겉넓이를 구하면 1152이다.

**8.** $x+y=2,\ x^3+y^3=14$일 때, 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $xy=-1$　　② $x^2+y^2=6$　　③ $x^4+y^4=34$

④ $x^5+y^5=86$　　⑤ $x^6+y^6=198$

**해설**

① $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$ 에서

$14=2^3-3xy\times 2$

$\therefore\ xy=-1$

② $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$ 에서

$x^2+y^2=2^2-2(-1)=6$

③ $x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2$ 에서

$x^4+y^4=6^2-2(-1)^2=34$

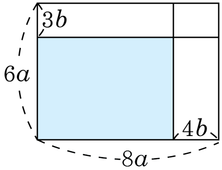
④ $x^5+y^5=(x^2+y^2)(x^3+y^3)-x^2y^2(x+y)$ 에서

$x^5+y^5=6\times 14-(-1)^2\times 2=82\neq 86$

⑤ $x^6+y^6=(x^3+y^3)^2-2x^3y^3$ 에서

$x^6+y^6=14^2-2(-1)^3=198$

**9.** 다음 그림에서 색칠한 직사각형의 넓이는?




① $6a^2-7ab+2b^2$

② $36a^2-42ab+12b^2$

③ $48a^2-48ab+12b^2$

④ $12a^2-12ab+3b^2$

⑤ $48a^2+48ab+12b^2$

해설

$(6a-3b)(8a-4b)=48a^2-48ab+12b^2$

**10.** 0이 아닌 세수 $x, y, z$에 대하여 $x, y, z$중 적어도 하나는 6이고, $x, y, z$의 역수의 합이 $\frac{1}{6}$일 때, $2(x+y+z)$의 값을 구하면?

① 6 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

해설

$x, y, z$중 적어도 하나가 6이므로,

$(x-6)(y-6)(z-6)=0$

$\therefore\ xyz-6(xy+yz+zx)+36(x+y+z)-216=0\ \cdots$①

또, $x, y, z$의 역수의 합이 $\frac{1}{6}$이므로

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{6},\ \frac{xy+yz+zx}{xyz}=\frac{1}{6}$

$\therefore\ 6(xy+yz+zx)=xyz\ \cdots$②

①, ②에서

$36(x+y+z)=216$

$\therefore\ 2(x+y+z)=12$

**11.** 다항식 $f(x)$는 모든 실수 $x$에 대하여 $f(x^2+1)=x^4+5x^2+3$을 만족시킨다. $f(x^2-1)$을 구한 것은?

① $x^4+5x^2+1$　② $x^4+x^2-3$　③ $x^4-5x^2+1$

④ $x^4+x^2+3$　⑤ 답 없음

**해설**

$x^2+1=t$라 하면 $x^2=t-1$

주어진 식에 대입하면

$f(t)=(t-1)^2+5(t-1)+3$

$\therefore\ f(t)=t^2+3t-1$

$$\begin{aligned} f(x^2-1) &= (x^2-1)^2+3(x^2-1)-1 \\ &= x^4+x^2-3 \end{aligned}$$

**12.** 삼각형의 세 변의 길이 $a$, $b$, $c$에 대하여 $\dfrac{a-b+c}{a+b+c}=\dfrac{-a-b+c}{a-b-c}$일 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① 빗변의 길이가 $a$인 직각삼각형

② 빗변의 길이가 $b$인 직각삼각형

③ 빗변의 길이가 $c$인 직각삼각형

④ $a=b$인 이등변삼각형

⑤ $b=c$인 이등변삼각형

**해설**

$\dfrac{a-b+c}{a+b+c}=\dfrac{-a-b+c}{a-b-c}$에서

$(a-b+c)(a-b-c)=(a+b+c)(-a-b+c)$

$(a-b+c)(a-b-c)+(a+b+c)(a+b-c)=0$

(좌변)

$=\{(a-b)+c\}\{(a-b)-c\}+\{(a+b)+c\}\{(a+b)-c\}$

$=(a-b)^2-c^2+(a+b)^2-c^2$

$=a^2-2ab+b^2-c^2+a^2+2ab+b^2-c^2$

$=2a^2+2b^2-2c^2$

따라서, $2a^2+2b^2-2c^2=0$이므로 $a^2+b^2=c^2$

그러므로 이 삼각형은 빗변의 길이가 $c$인 직각삼각형이다.

**13.** $x^2 - x - 1 = 0$ 일 때, $x^3 - \frac{1}{x^3}$ 의 값과 $y + \frac{1}{y} = 1$ 일 때, $\frac{y^{10}+1}{y^2}$ 의 값은?

① 4, −1　② 4, 18　③ 8, −1　④ 9, −1　⑤ 4, 27

해설

(1) $x^2 - x - 1 = 0$ 의 양변을 $x$ 로 나누면

$$x - 1 - \frac{1}{x} = 0$$

$$\therefore\ x - \frac{1}{x} = 1$$

$$\therefore\ x^3 - \frac{1}{x^3} = \left(x - \frac{1}{x}\right)^3 + 3x \cdot \frac{1}{x}\left(x - \frac{1}{x}\right)$$

$$= 1^3 + 3 \cdot 1 \cdot 1 = 4$$

(2) $y + \frac{1}{y} = 1$ 일 때

$y + \frac{1}{y} = 1$ 에서 $\frac{y^2+1}{y} = 1$

$\therefore\ y^2 - y + 1 = 0 \cdots\cdots$ ㉠

양변에 $(y+1)$ 을 곱하면 $(y+1)(y^2 - y + 1) = 0$

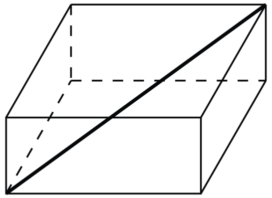
$y^3 + 1 = 0\ \therefore\ y^3 = -1 \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서

$$\frac{y^{10}+1}{y^2} = \frac{(y^3)^3 \cdot y + 1}{y^2} = \frac{-y+1}{y^2}$$

$$= \frac{-y^2}{y^2} = -1$$

**14.** 다음 그림과 같이 대각선의 길이가 3이고 겉넓이가 16, 부피가 6인 직육면체가 있다. 이 직육면체의 가로, 세로, 높이를 각각 $a$, $b$, $c$라 할 때, $a^3+b^3+c^3$ 의 값은?



① 12 ② 18 ③ 21 ④ 23 ⑤ 30

해설

$\sqrt{a^2+b^2+c^2}=3,\ abc=6,\ 2(ab+bc+ca)=16$

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

$(a+b+c)^2=25,\ a+b+c=5(\because a,b,c$는양수$)$

$a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\ \cdots ①$

①에 각각 대입하면

$a^3+b^3+c^3-18=5\times(9-8)$

$a^3+b^3+c^3=23$

**15.** $x-y=1$ 이고 $x^2+y^2=-1$ 일 때, $x^{10}+y^{13}$ 의 값은 얼마인가?

① $-1$ ② $0$ ③ $1$ ④ $2$ ⑤ $-2$

해설

$x-y=1$ 에서 $y=x-1$

이것을 $x^2+y^2=-1$ 에 대입하면

$2x^2-2x+2=0$

$x^2-x+1=0$

양변에 $x+1$ 을 곱하면, $x^3+1=0$

$\therefore\ x^3=-1$

또 $x=y+1$ 을 $x^2+y^2=-1$ 에 대입하면

$2y^2+2y+2=0,\ y^2+y+1=0\ \therefore\ y^3=1$

$$\begin{aligned}\therefore\ x^{10}+y^{13}&=(x^3)^3\cdot x+(y^3)^4\cdot y\\&=(-1)^3\cdot x+1^4\cdot y\\&=-(x-y)=-1\end{aligned}$$