

1. 방정식 $a(ax - 1) = 2(ax - 1)$ 에 대한 설명으로 옳은 것은?

① $a = 0$ 일 때, 부정

② $a = 2$ 일 때, 불능

③ $a \neq 2$ 일 때, $x = \frac{1}{a}$

④ $a \neq 0$ 일 때, 해는 없다.

⑤ $a \neq 0, a \neq 2$ 일 때, $x = \frac{1}{a}$

해설

$$a(ax - 1) = 2(ax - 1), a^2x - 2ax = a - 2 \text{에서}$$

$$a(a - 2)x = a - 2$$

i) $a \neq 0, a \neq 2$ 일 때, $x = \frac{1}{a}$

ii) $a = 2$ 일 때, $0 \cdot x = 0$ 이므로 해는 무수히 많다. (부정)

iii) $a = 0$ 일 때, $0 \cdot x = -2$ 이므로 해가 없다. (불능)

따라서 옳은 것은 ⑤뿐이다.

2. 방정식 $(x-1)^2 + |x-1| - 6 = 0$ 의 두 근의 합은?

① -1

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 6

해설

(i) $x \geq 1$ 일 때

$$x^2 - 2x + 1 + x - 1 - 6 = 0$$

$$x^2 - x - 6 = 0, (x-3)(x+2) = 0 \text{이므로}$$

$$x = -2, x = 3$$

그런데 $x \geq 1$ 이므로 $x = 3$

(ii) $x < 1$ 일 때

$$x^2 - 2x + 1 - x + 1 - 6 = 0$$

$$x^2 - 3x - 4 = 0, (x-4)(x+1) = 0$$

$$x = -1, x = 4$$

그런데 $x < 1$ 이므로 $x = -1$

(i), (ii) 에서 $x = 3, -1$ 이므로

두 근의 합은 2

3. 방정식 $x^2 + 2(k+a)x + k^2 + k + b = 0$ 이 k 의 값에 관계없이 중근을 갖도록 실수 a, b 의 값을 정할 때, $a + 2b$ 의 값을 구하면?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$$\text{준식에서 } \frac{D}{4} = (k+a)^2 - (k^2 + k + b)$$

$$= (2a-1)k + a^2 - b = 0$$

이것이 k 에 대한 항등식이 되어야 하므로

$$2a - 1 = 0, \quad a^2 - b = 0$$

$$\therefore a = \frac{1}{2}, \quad b = \frac{1}{4}$$

$$\therefore a + 2b = 1$$

4. x 에 대한 이차방정식 $x^2 + mx + 6 = 0$ 의 두 근 a, b 에 대하여 $|a - b| = 1$ 이 성립할 때, $\sqrt{a+1} + \sqrt{b+1}$ 의 값은? (단, $m < 0$)

① $-1 - \sqrt{2}$

② $2 + \sqrt{3}$

③ $2 - \sqrt{3}$

④ $1 + \sqrt{2}$

⑤ $-2 + \sqrt{5}$

해설

$$x^2 + mx + 6 = 0 \text{의 두 근이 } a, b$$

$$a + b = -m, ab = 6$$

$$|a - b| = 1$$

$$|a - b|^2 = (a + b)^2 - 4ab$$

$$= m^2 - 24 = 1$$

$$m^2 = 25 \therefore m = -5 (\because m < 0)$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$(x - 3)(x - 2) = 0$$

$$a = 3, b = 2$$

$$\therefore \sqrt{a+1} + \sqrt{b+1} = \sqrt{4} + \sqrt{3} = 2 + \sqrt{3}$$

5. 이차함수 $y = ax^2 - 5x - 2$ 의 그래프와 직선 $y = bx + a$ 의 교점의 x 좌표가 각각 0, -3 일 때, 상수 a, b 의 합 $a + b$ 의 값은?

① -3

② -2

③ -1

④ 0

⑤ 1

해설

이차함수 $y = ax^2 - 5x - 2$ 의 그래프와

직선 $y = bx + a$ 의 교점의 x 좌표 0, -3 은

이차방정식 $ax^2 - (b+5)x - a - 2 = 0$ 의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$(\text{두근의합}) = 0 + (-3) = \frac{b+5}{a}$$

$$\therefore 3a + b = -5 \cdots \textcircled{1}$$

$$(\text{두 근의 곱}) = 0 \cdot (-3) = \frac{-a-2}{a}$$

$$\therefore a = -2$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } b = 1 \text{ 이므로 } a + b = -1$$

6. $x^2 + y^2 = 5$ 를 만족시키는 실수 x, y 에 대하여 $2x - y$ 는 $x = \alpha, y = \beta$ 에서 최댓값 m 을 갖는다. 이때, $m + \alpha + \beta$ 의 값은?

① 2

② 3

③ 4

④ 5

⑤ 6

해설

$2x - y = k$ 로 놓으면

$$y = 2x - k \cdots \textcircled{㉠}$$

㉠을 $x^2 + y^2 = 5$ 에 대입하면

$$x^2 + (2x - k)^2 = 5$$

$$\therefore 5x^2 - 4kx + k^2 - 5 = 0 \cdots \textcircled{㉡}$$

㉡을 x 에 대한 이차방정식으로 보면

x 가 실수이므로

$$\frac{D}{4} = 4k^2 - 5(k^2 - 5) \geq 0, k^2 \leq 25$$

$$\therefore -5 \leq k \leq 5$$

따라서 k 의 최댓값은 5이다.

이 때의 x, y 의 값은

$$\textcircled{㉡} \text{에서 } 5x^2 - 20x + 20 = 0, 5(x - 2)^2 = 0 \therefore x = 2$$

$$\textcircled{㉠} \text{에서 } y = 4 - 5 = -1$$

따라서, $m = 5, \alpha = 2, \beta = -1$ 이므로

$$m + \alpha + \beta = 6$$

7. 연립방정식 $xy = z$, $yz = x$, $zx = y$ 를 만족하는 0이 아닌 실수해 x, y, z 의 쌍 (x, y, z) 의 개수는?

① 1개

② 2개

③ 4개

④ 8개

⑤ 무수히 많다.

해설

주어진 식을 변변 곱하면 $(xyz)^2 = xyz$

$xyz \neq 0$ 이므로 $xyz = 1$

여기에 $xy = z$ 를 대입하면 $z^2 = 1$, $z = \pm 1$

(i) $z = 1$ 을 주어진 연립방정식에 대입하면,

$$xy = 1, x = y$$

$$\therefore (x, y, z) = (1, 1, 1), (-1, -1, 1)$$

(ii) $z = -1$ 을 주어진 연립방정식에 대입하면

$$xy = -1, x = -y$$

$$\therefore (x, y, z) = (1, -1, -1), (-1, 1, -1)$$

(i), (ii)에서 조건을 만족하는 (x, y, z) 는 모두 4개이다.

8. a, b, c 가 삼각형의 세 변의 길이를 나타낼 때, $(a+b)x^2 + 2cx + a-b$ 는 x 의 완전제곱식이다. 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① 정삼각형

② $a = b$ 인 이등변삼각형

③ $b = c$ 인 이등변삼각형

④ a 가 빗변인 직각삼각형

⑤ c 가 빗변인 직각삼각형

해설

a, b, c 가 삼각형의 세 변의 길이이므로

$$a > 0, b > 0, c > 0$$

따라서, $a + b > 0$ 이므로 준식은 이차식이다.

준식이 완전제곱식이 되려면

$$\text{판별식 } D = 0$$

$$\frac{D}{4} = c^2 - (a+b)(a-b) = 0$$

$$\text{정리하면, } c^2 - a^2 + b^2 = 0$$

$$\therefore a^2 = b^2 + c^2$$

따라서, a 가 빗변인 직각삼각형

9. 방정식 $3x^2 + 5x - 2 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하고 방정식 $5x^2 + 4x + 3 = 0$ 의 두 근을 γ, δ 라 할 때, $\frac{1}{\alpha\gamma} + \frac{1}{\beta\gamma} + \frac{1}{\delta\beta} + \frac{1}{\delta\alpha}$ 의 값은?

① $-\frac{10}{3}$

② $-\frac{7}{3}$

③ $-\frac{4}{3}$

④ $-\frac{1}{3}$

⑤ 1

해설

$$\alpha + \beta = -\frac{5}{3}, \alpha\beta = -\frac{2}{3}, \gamma + \delta = -\frac{4}{5}, \gamma\delta = \frac{3}{5}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\alpha\gamma} + \frac{1}{\beta\gamma} + \frac{1}{\delta\beta} + \frac{1}{\delta\alpha} \\ &= \frac{1}{\gamma} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right) + \frac{1}{\delta} \left(\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\alpha} \right) \\ &= \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right) \left(\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\delta} \right) \\ &= \left(\frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} \right) \left(\frac{\gamma + \delta}{\gamma\delta} \right) \\ &= \frac{-\frac{5}{3}}{-\frac{2}{3}} \times \frac{-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = -\frac{10}{3} \end{aligned}$$

10. $-2 \leq x \leq 1$ 일 때, 함수 $y = |x^2 + 2x - 5|$ 의 최댓값과 최솟값의 합은?

① 4

② 5

③ 6

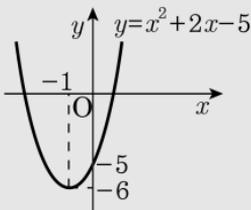
④ 7

⑤ 8

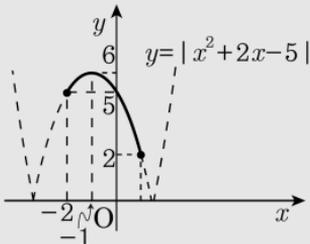
해설

$y = x^2 + 2x - 5 = (x + 1)^2 - 6$ 이므로

$y = x^2 + 2x - 5$ 의 그래프는 아래 그림과 같다.



이 때, $y = |x^2 + 2x - 5|$ 의 그래프는 아래 그래프에서 x 축 윗부분은 그대로 두고, x 축 아랫부분을 x 축에 대하여 대칭 이동한 것과 같다.



따라서 $-2 \leq x \leq 1$ 에서

함수 $y = |x^2 + 2x - 5|$ 의 최댓값은 $x = -1$ 일 때 $y = 6$, 최솟값은 $x = 1$ 일 때 $y = 2$ 이므로

최댓값과 최솟값의 합은 8 이다.

11. 다음 그림과 같이 20m인 철망으로 직사각형의 모양의 닭장을 만들려고 한다.
넓이가 최대가 되도록 하는 x 의 값은?



- ① 3 m ② 4 m ③ 5 m
④ 6 m ⑤ 7 m

해설

직사각형의 세로의 길이를 x , 가로 길이를 $20 - 2x$ 라고 하면,

$$y = x(20 - 2x)$$

$$= -2x^2 + 20x$$

$$= -2(x - 5)^2 + 50$$

$x = 5$ 일 때, 최댓값은 50 이다.

12. 방정식 $x^4 + Ax^3 - 7x^2 - Ax + 3B = 0$ 의 두 근이 -1 과 -2 일 때, 다른 두 근을 α, β 라 하자. 이 때, $A + B - \alpha\beta$ 의 값을 구하면?

① -1

② -2

③ -3

④ 1

⑤ 2

해설

$f(x) = x^4 + Ax^3 - 7x^2 - Ax + 3B$ 라 하면 $-1, -2$ 가 근이므로

$$f(-1) = 1 - A - 7 + A + 3B = 0$$

$$\therefore B = 2$$

$$f(-2) = 16 - 8A - 28 + 2A + 3B = 0, -6A + 3B - 12 = 0 \quad \therefore A = -1$$

$$\therefore A + B = -1 + 2 = 1 \dots \text{㉠}$$

$$\therefore (x+1)(x+2)(x^2 - 4x + 3) = 0$$

따라서, 다른 두 근은 $x^2 - 4x + 3 = 0$ 의 근이다.

$$\therefore \alpha\beta = 3 \dots \text{㉡}$$

$$\text{㉠, ㉡에서 } A + B - \alpha\beta = 1 - 3 = -2$$

13.
$$\begin{cases} |x| + x + y = 10 \\ x + |y| - y = 12 \end{cases}$$
 일 때, $x + y$ 의 값은?

① -2

② 2

③ $\frac{18}{5}$

④ $\frac{22}{3}$

⑤ 22

해설

$|x| + x + y = 10 \quad \dots\dots \text{㉠}$

$x + |y| - y = 12 \quad \dots\dots \text{㉡}$

$x \leq 0$ 이면, $y = 10, x = 12$

이것은 $x \leq 0$ 을 만족하지 않는다.

$x > 0$ 이면 $2x + y = 10 \dots\dots \text{㉢}$

$y \geq 0$ 이면 $x = 12, y = -14$

이것은 $y \geq 0$ 을 만족하지 않는다.

$y < 0$ 이면, $x - 2y = 12 \dots\dots \text{㉣}$

㉢, ㉣에서 $x = \frac{32}{5}, y = -\frac{14}{5}$

$\therefore x + y = \frac{18}{5}$

14. 다음 x 에 관한 두 개의 이차방정식 $\begin{cases} x^2 - 2x + a^2 = 0 \cdots \textcircled{㉠} \\ x^2 - ax + 2a = 0 \cdots \textcircled{㉡} \end{cases}$

에서 공통근이 오직 한 개일 때, a 의 값과 공통근 k 를 구하면?(단, a 는 실수)

- ① $a = 0$ 일 때 $k = 0$, $a = -1$ 일 때, $k = 1$
 ② $a = 2$ 일 때 $k = 1 \pm \sqrt{3}i$
 ③ $a = 1$ 일 때 $k = 1$, $a = 2$ 일 때, $k = 1$
 ④ $a = 3$ 일 때 $k = 2 \pm \sqrt{3}$
 ⑤ $a = 2$ 일 때 $k = -1$, $a = 3$ 일 때, $k = 1$

해설

공통근을 $x = k$ 라 하면

$$k^2 - 2k + a^2 = 0 \cdots \textcircled{1}$$

$$k^2 - ka + 2a = 0 \cdots \textcircled{2}$$

두 식을 빼주면, $(k+a)(a-2) = 0$

$$\therefore a = 2 \text{ 또는 } k = -a$$

i) $a = 2$ 일 때

①, ②이 같아지므로 성립하지 않는다.

ii) $k = -a$ 일 때

①에 넣으면 $a = 0$ 또는 $a = -1$

$$\begin{cases} a = 0 \text{ 이면 } k = 0 \\ a = -1 \text{ 이면 } k = 1 \end{cases}$$

15. x 에 대한 이차방정식 $x^2 - kx + k + 3 = 0$ 의 두 근이 모두 정수 일 때, 상수 k 의 값의 합은?

① 0

② 2

③ 4

④ 6

⑤ 8

해설

$x^2 - kx + k + 3 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하자

$$\alpha + \beta = k, \alpha\beta = k + 3 \rightarrow \alpha + \beta + 3 = \alpha\beta$$

$$\alpha\beta - \alpha - \beta = 3$$

$(\alpha - 1)(\beta - 1) = 4$ α, β 는 정수이므로

$$1 \times 4 \Rightarrow \alpha = 2, \beta = 5, \quad k = 7$$

$$2 \times 2 \Rightarrow \alpha = 3, \beta = 3, \quad k = 6$$

$$-1 \times -4 \Rightarrow \alpha = 0, \beta = -3, \quad k = -3$$

$$-2 \times -2 \Rightarrow \alpha = -1, \beta = -1, \quad k = -2$$

$$\therefore 7 + 6 - 3 - 2 = 8$$