1. 이차방정식 $x^2 + 2(k-1)x + 4 = 0$ 이 중근을 갖도록 하는 상수 k 값들의 합은?

① 1 ② −2 ③ −1 ④ 0 ⑤ 2

해설

중근을 가지려면 판별식 $D = 0$

$\frac{D}{4} = (k-1)^2 - 4 = 0$

$k^2 - 2k - 3 = 0$, $(k-3)(k+1) = 0$

$\therefore\ k = 3, -1$

2. x에 대한 이차방정식 $x^2 - 2(m+a-1)x + m^2 + a^2 - 2b = 0$이 m의 값에 관계없이 중근을 갖는다. $a+b$의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{3}$

해설

중근을 가지므로, $\frac{D'}{4} = 0$을 만족한다.

$\frac{D'}{4} = (m+a-1)^2 - (m^2 + a^2 - 2b) = 0$

$m(2a-2) + (1-2a+2b) = 0$

m에 대한 항등식이므로

$2a - 2 = 0,\ 1 - 2a + 2b = 0$

$\therefore\ a = 1,\ b = \frac{1}{2}$

$\therefore\ a + b = \frac{3}{2}$

3. 이차방정식 $x^2+(m+1)x+m+4=0$이 중근을 가질 때, 모든 실수 m의 값의 합을 구하면?

① -3 ② 0 ③ 2 ④ 3 ⑤ 5

해설

중근을 가지므로, 판별식 $D=0$
$D=(m+1)^2-4\cdot 1\cdot (m+4)=m^2-2m-15=0$
$(m-5)(m+3)=0 \quad \therefore\ m=-3,\ 5$
$\therefore\ m$의 값의 합은 $-3+5=2$

4. x에 대한 이차방정식 $kx^2+2(k+1)x+k=0$이 중근을 가질 때 k의 값은?

① $-\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ -1 ⑤ $\frac{3}{2}$

해설

$\frac{D}{4}=b'^2-ac=(k+1)^2-k^2=2k+1$에서
중근을 가질 조건이므로
$\frac{D}{4}=0$이어야 한다.
$2k+1=0 \quad \therefore k=-\frac{1}{2}$

5. 이차방정식 $x^2+2x+k-3=0$이 서로 다른 두 실근을 가질 때, 정수 k의 최대값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

서로 다른 두 실근을 갖으려면 판별식이 0보다 커야 한다.
$D' = 1^2 - (k-3) > 0$
$\therefore\ k < 4$
$\therefore$ 최댓값은 3 ($\because$ k는 정수)

6. 이차방정식 $x^2+2x+2-a=0$ 이 서로 다른 두 실근을 갖기 위한 a 의 범위를 구하면?

① $a<1$ ② $a \geq 1$ ③ $-1<a<1$

④ $a>1$ ⑤ $a \geq -1$

해설

$x^2+2x+2-a=0$ 이
서로 다른 두 실근을 갖기 위해서는
판별식 $D>0$ 이어야 한다.

$\frac{D}{4}=1-(2-a)>0$

$1-2+a>0$

$\therefore\ a>1$

7. 이차방정식 $3x^2 - 6x + k = 0$이 실근을 갖도록 실수 k의 범위를 정하면?

① $k < 1$　　② $k \leq 1$　　③ $k < 3$

④ $k \leq 3$　　⑤ $1 < k < 3$

해설

$3x^2 + 6x + k = 0,$

$\dfrac{D}{4} = (-3)^2 - 3 \cdot k \geq 0$

$3k \leq 9 \quad \therefore\ k \leq 3$

8. x에 대한 이차방정식 $x^2+2(a+3)x+a^2+7=0$이 실근을 갖도록 하는 실수 a의 값의 범위는?

① $a \geq 0$ ② $-1 < a < 0$ ③ $-2 < a < 0$
④ $a \geq -\frac{1}{3}$ ⑤ $0 \leq a \leq \frac{1}{3}$

해설

주어진 이차방정식이 실근을 갖기 위해서는 판별식 $\frac{D}{4} \geq 0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=(a+3)^2-(a^2+7) \geq 0$

$a^2+6a+9-a^2-7 \geq 0$

$6a+2 \geq 0$ $\therefore a \geq -\frac{1}{3}$

9. x에 대한 이차방정식 $(k-1)x^2+2kx+k-1=0$이 서로 다른 두 실근을 갖기 위한 자연수 k의 최솟값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

(ⅰ) 이차방정식이므로 x^2의 계수는 $k-1 \neq 0$이어야 한다.
따라서 $k \neq 1$

(ⅱ) 서로 다른 두 실근을 갖기 위해서는 판별식 $\frac{D}{4} > 0$이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = k^2-(k-1)^2 > 0,\ 2k-1>0$$

$$\therefore k > \frac{1}{2}$$

따라서 자연수 k의 최솟값은 2이다.

10. x 가 실수 일 때, 다음 중 $x+\frac{1}{x}$ 의 값이 될 수 없는 것은? (단, $x \neq 0$)

① -5 ② -2 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

해설

$x+\frac{1}{x}=t$ 라 하고,
양변에 x 를 곱하면
$x^2+1=tx$
$x^2-tx+1=0$ 에서 x 는 실수이므로
$D=t^2-4 \geq 0 \quad \therefore t^2 \geq 4,\ t \leq -2$ 또는 $t \geq 2$

11. x에 대한 일차방정식 $5x + a = 2x + 12$의 해가 자연수일 때, 자연수 a 의 개수는?

① 1개 ② 2개 ③ 3개

④ 4개 ⑤ 무수히 많다

해설

$5x - 2x = 12 - a, 3x = 12 - a$

$\therefore x = \dfrac{12 - a}{3}$

자연수 $a = 1, 2, 3, \cdots$ 을 대입했을 때,

$x = \dfrac{12 - a}{3}$ 가 자연수가 되는 경우는

$12 - a$ 가 3 의 배수이면서 $a < 12$ 일 때이다.

i) $a = 3$ 일 때, $x = \dfrac{12 - 3}{3} = 3$

ii) $a = 6$ 일 때, $x = \dfrac{12 - 6}{3} = 2$

iii) $a = 9$ 일 때, $x = \dfrac{12 - 9}{3} = 1$

따라서 자연수 a 의 개수는 3 개이다.

12. $|x-2|+|x-3|=1$을 만족하는 실수 x의 개수는?

① 0개 ② 1개 ③ 2개
④ 3개 ⑤ 4개이상

해설

$|x-2|+|x-3|=1$에서
ⅰ) $x<2$일 때,
$-(x-2)-(x-3)=1$
$\therefore\ x=2$ (성립하지 않음)
ⅱ) $2\le x<3$일 때,
$(x-2)-(x-3)=1$
$\therefore\ 0\cdot x=0$ (모든 실수)
ⅲ) $x\ge 3$일 때,
$(x-2)+(x-3)=1$
$\therefore\ x=3$

13. 방정식 $\left[x+\frac{1}{2}\right]^2-3\left[x-\frac{1}{2}\right]-7=0$의 해 $a \le x < b$ 또는 $c \le x < d$에 대하여 $a+b+c+d$의 값은? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대 정수)

① 2　　② 4　　③ 6　　④ 8　　⑤ 10

해설

$\left[x-\frac{1}{2}\right]=\left[x+\frac{1}{2}\right]-1$이므로

$\left[x+\frac{1}{2}\right]^2-3\left[x+\frac{1}{2}\right]-4=0$

$\left[x+\frac{1}{2}\right]=4$ 또는 $\left[x+\frac{1}{2}\right]=-1$이므로

$\frac{7}{2} \le x < \frac{9}{2}, -\frac{3}{2} \le x < -\frac{1}{2}$이다

따라서 구하는 값은

$\therefore a+b+c+d=6$

14. $x^2+2\sqrt{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}x+\frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ca}}=0$의 근을 판별하면?
(단, a, b, c는 서로 다른 양의 실수이다.)

① 서로 다른 두 허근

② 서로 다른 두 실근

③ 서로 같은 두 실근

④ 서로 다른 두 허근

⑤ 한 근은 실근, 한 근은 허근

해설

$$\frac{D}{4}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{\sqrt{ab}}-\frac{1}{\sqrt{bc}}-\frac{1}{\sqrt{ca}}$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{c}}\right)^2-\frac{1}{\sqrt{ab}}-\frac{1}{\sqrt{bc}}-\frac{1}{\sqrt{ca}}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{a}}-\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{b}}-\frac{1}{\sqrt{c}}\right)^2\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{\sqrt{c}}-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2\right\}>0$$

따라서 서로 두 실근을 갖는다.

(단, $\frac{1}{\sqrt{a}}=\frac{1}{\sqrt{b}}=\frac{1}{\sqrt{c}}$일 때 중근)

15. x에 관한 이차방정식 $x^2-2(k-a)x+k^2+a^2-b+1=0$이 k의 값에 관계없이 중근을 갖도록 $a,\ b$의 값을 정하면?

① $a=0,\ b=1$ ② $a=0,\ b=-1$ ③ $a=-1,\ b=0$
④ $a=-1,\ b=1$ ⑤ $a=-1,\ b=2$

해설

$\frac{D}{4}=(k-a)^2-(k^2+a^2-b+1)=0$에서
$k^2-2ak+a^2-k^2-a^2+b-1=0$
$\therefore\ -2ak+b-1=0$
이것이 k값에 관계없이 항상 성립하기 위해서는
$-2a=0,\ b-1=0$
$\therefore\ a=0,\ b=1$

16. x에 대한 이차방정식 $x^2+2mx+2m^2+m-2=0$이 두 실근 α, β를 가질 때, $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2$를 m에 대한 식으로 나타내고, 이 식의 최댓값과 최솟값을 구하면?

① 최대값 : 8, 최소값 : 2
② 최대값 : 10, 최소값 : 3
③ 최대값 : 12, 최소값 : $\frac{15}{8}$
④ 최대값 : 11, 최소값 : $\frac{21}{8}$
⑤ 최대값 : 13, 최소값 : $\frac{7}{8}$

해설

주어진 방정식이 실근을 가지므로
$D/4 = m^2-(2m^2+m-2) \ge 0$에서 $-2 \le m \le 1$
$\alpha+\beta=-2m,\ \alpha\beta=2m^2+m-2$이므로
$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta$
$=(-2m)^2-(2m^2+m-2)$
$=2m^2-m+2$
$=2\left(m-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{15}{8}(-2 \le m \le 1)$
$\therefore m=\frac{1}{4}$일 때, 최솟값 $\frac{15}{8}$
$m=-2$일 때, 최댓값 12

17. x의 방정식 $(x-a)(x-b)-cx=0$의 해가 α, β일 때, x의 방정식 $(x-\alpha)(x-\beta)+cx=0$의 해를 a, b로 나타내면?

① $-a,\ -b$ ② $a,\ b$ ③ $-2a,\ -2b$

④ $2a,\ 2b$ ⑤ $a,\ -b$

해설

$x^2-(a+b+c)x+ab=0$의 두 근이 $\alpha,\ \beta$이므로

$\alpha+\beta=a+b+c,\ \alpha\beta=ab$ 이것을

$x^2-(\alpha+\beta-c)x+\alpha\beta=0$에 대입하면

$x^2-(a+b)x+ab=0$

$\therefore\ (x-a)(x-b)=0$ 따라서 $x=a,\ b$

18. α는 이차방정식 $ax^2-2ax+b=0$의 근이고 β는 이차방정식 $bx^2-2ax+a=0$의 근이라고 할 때, $\alpha+\frac{1}{\beta}$의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

β 가 방정식 $bx^2-2ax+a=0$ 의 근이므로
$b\beta^2-2a\beta+a=0$ $\cdots\cdots$ ㉠
$ax^2-2ax+b=0$에 $x=\frac{1}{\beta}$ 를 대입하면,
㉠에 의해서
$$a\left(\frac{1}{\beta}\right)^2-2a\left(\frac{1}{\beta}\right)+b=\frac{1}{\beta^2}(b\beta^2-2a\beta+a)=0$$
따라서, $x=\frac{1}{\beta}$은 방정식 $ax^2-2ax+b=0$의 근이다.
그런데 α도 이 방정식 $ax^2-2ax+b=0$의 근이므로 방정식 $ax^2-2ax+b=0$의 두 근은 α와 $\frac{1}{\beta}$이다.

따라서, 이차방정식의 근과 계수와의 관계에 의해서 $\alpha+\frac{1}{\beta}=2$

19. x에 관한 이차방정식 $x^2+(m+1)x+(m^2-1)=0$이 실근 α,β를 가질 때, $\alpha^2+\beta^2$의 최솟값을 구하면? (단, m은 실수이다.)

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$D=(m+1)^2-4(m^2-1)\geq 0,\ 3m^2-2m-5\leq 0,\ (3m-5)(m+1)\leq 0$

$\therefore\ -1\leq m\leq \frac{5}{3}$

근과 계수와의 관계에서

$\alpha+\beta=-(m+1),\ \alpha\beta=m^2-1$

$\therefore \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$=\{-(m+1)\}^2-2(m^2-1)$

$=-m^2+2m+3=-(m-1)^2+4$

따라서, 구하는 최솟값은 0 ($m=-1$일 때)

20. 직선 $y=x+a$가 포물선 $y=ax^2+(b+1)x-\frac{b}{2}$에 의해 잘려진 선분의 길이의 최솟값을 구하면?

① $\sqrt{5}$ ② $\sqrt{6}$ ③ $\sqrt{7}$ ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ $5\sqrt{3}$

해설

교점의 x좌표를 구하는 식은

$ax^2+(b+1)x-\frac{b}{2}=x+a$

$ax^2+bx-\frac{b}{2}-a=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 하면

$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\ \alpha\beta=\frac{-\frac{b}{2}-a}{a}$

교점은 $(\alpha,\ \alpha+a),\ (\beta,\ \beta+a)$

$\therefore$교점을 이은 선분의 길이를 l이라 하면

$l^2=2(\beta-\alpha)^2=2(\beta+\alpha)^2-8\alpha\beta$

$=2\left(-\frac{b}{a}\right)^2-8\left(\frac{-\frac{b}{2}-a}{a}\right)$

$=2\left\{\left(\frac{b}{a}\right)^2+2\left(\frac{b}{a}\right)+4\right\}$

$=2\left\{\left(\frac{b}{a}+1\right)^2+3\right\}\geq 6$

$\therefore\ l\geq\sqrt{6}$

21. 이차방정식 $x^2+5x+1=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$의 값을 구하면?

① $\pm\sqrt{3}i$　② $\sqrt{3}i$　③ $\sqrt{7}i$　④ $\pm\sqrt{7}i$　⑤ 0

해설

$D>0$이므로 α, β는 실수

$\alpha+\beta=-5,\ \alpha\beta=1 \quad \therefore \alpha<0, \beta<0$

$$(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2 = \alpha+\beta+2\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}$$
$$= \alpha+\beta-2\sqrt{\alpha\beta} = -7$$

$\therefore \sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\sqrt{7}i$

$\sqrt{-\alpha}i+\sqrt{-\beta}i=(\sqrt{-\alpha}+\sqrt{-\beta})i$ 의 꼴이 되므로 $-\sqrt{7}i$가 구하는 값이 될 수 없다.

22. 이차방정식 $x^2+x+2=0$의 두 근을 α, β라 한다. $S_n=\alpha^n+\beta^n(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$이라 할 때, $S_{n+2}+S_{n+1}+2S_n=$(가), $S_4+S_3+S_2=$(나) 이다. 이 때, (가), (나)에 알맞은 수를 차례로 쓰면?

① 0, 1　　② 0, 2　　③ 0, 3　　④ 1, 1　　⑤ 1, 2

해설

$\alpha+\beta=-1,\ \alpha\beta=2$

$S_{n+2}+S_{n+1}+2S_n$

$=(\alpha^{n+2}+\beta^{n+2})+(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1})+2(\alpha^n+\beta^n)$

$=\alpha^n(\alpha^2+\alpha+2)+\beta^n(\beta^2+\beta+2)=0$

$(\because \alpha^2+\alpha+2=0,\ \beta^2+\beta+2=0)$

$n=2$를 대입하면 $S_4+S_3+2S_2=0$

$$\begin{aligned}\therefore\ S_4+S_3+S_2&=-S_2\\&=-(\alpha^2+\beta^2)\\&=-\left\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\right\}\\&=-(1-4)=3\end{aligned}$$

23. 이차방정식 $x^2-2x-1=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, $\left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}-\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\right)^2$ 의 값은?

① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

해설

$x^2-2x-1=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=-1$

$\alpha\beta<0$이므로 $\frac{\beta}{\alpha}<0,\ \ \frac{\alpha}{\beta}<0$

$\therefore \left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}-\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\right)^2=\frac{\beta}{\alpha}-2\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}+\frac{\alpha}{\beta}$

$=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}+2\left(\because \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}=-\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{\alpha}{\beta}}\right)$

$=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}+2$

$=-4$

해설

24. p와 q가 소수이고, $x^2-px+q=0$이 서로 다른 두 개의 양의 정수근을 가질 때, 다음 중 옳은 문장은 몇 개인가?

㈎ 두 근의 차는 홀수이다.
㈏ 적어도 한 근은 소수이다.
㈐ p^2-q는 소수이다.
㈑ $p+q$는 소수이다.

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 0개

해설

$x^2-px+q=0$의 서로 다른 양의 정수근을 α, β라 하면
$\alpha+\beta=p$ ……㉠
$\alpha\beta=q$ ……㉡이다.
그런데, q가 소수이므로 ㉡에서 두 근은 1과 q이다.
∴ ㉠에서 $1+q=p$ ∴ $p-q=1$
그런데 p도 소수이므로 두 소수의 차가 1인 경우는 $p=3, q=2$일 때 뿐이다.
$x^2-3x+2=0$에서 $(x-1)(x-2)=0$
∴ $x=1, 2$
따라서, 주어진 문장은 모두 옳다.

25. 실수를 계수로 갖는 이차방정식 $x^2-(m-1)x+(m+1)=0$이 허근 α를 갖고, α^3이 실수일 때, m의 값은?

① 0　　② 1　　③ 3

④ 0, 3　　⑤ 0, 1, 3

해설

α^3이 실수이므로 $\overline{\alpha}^3=\alpha^3$,

$(\alpha-\overline{\alpha})(\alpha^2+\alpha\overline{\alpha}+\overline{\alpha}^2)=0$

α는 허수이므로 $\alpha \neq \overline{\alpha}$

$\therefore\ \alpha^2+\alpha\overline{\alpha}+\overline{\alpha}^2=0 \ \cdots\cdots$ (ⅰ)

근과 계수와의 관계에서

$\alpha+\overline{\alpha}=m-1,\ \alpha\overline{\alpha}=m+1$

(ⅰ)은 $(\alpha+\overline{\alpha})^2-\alpha\overline{\alpha}=0$, $(m-1)^2-(m+1)=0$

$m^2-3m=m(m-3)=0$

$\therefore\ m=0,\ 3$

이차방정식 $x^2-(m-1)x+(m+1)=0$이

허근을 가지므로 $D=(m-1)^2-4(m+1)<0$

$m=0,\ 3$은 이 부등식을 만족시키므로 구하는 답이 된다.

26. 실수 x, y, z가 $x+y+z=6$, $xy+yz+zx=9$를 만족할 때 x의 최대값을 M, 최소값을 m이라 한다. 이 때 $M-m$의 값을 구하면 ?

① 0　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 4

해설

$y+z=6-x$,

$yz=9-x(y+z)=9-x(6-x)=(x-3)^2$

실수 y, z를 두 근으로 하는 이차방정식을 만들면

$t^2-(6-x)t+(x-3)^2=0$

$D=(6-x)^2-4(x-3)^2 \geq 0$에서 $x(x-4) \leq 0$

$\therefore\ 0 \leq x \leq 4$

$M=4,\ m=0\quad \therefore\ M-m=4$

27. 방정식 $x^2+x+1=0$의 두 근을 α, β라 하자. 3의 배수가 아닌 정수 n에 대하여 α^n, β^n을 두 근으로 하는 이차방정식은 $x^2+(㉮)x+(㉯)=0$이다. ㉮와 ㉯에 알맞은 수의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

α, β는 방정식 $x^2+x+1=0$의 두 근이므로
$\alpha^2+\alpha+1=0, \beta^2+\beta+1=0$
$\therefore\ \alpha^3=1,\ \beta^3=1$
한편, 근과 계수와의 관계에서 $\alpha+\beta=-1, \alpha\beta=1$
㉠ : $n=3k+1$(k는 정수) 일 때,
$\alpha^n+\beta^n=(\alpha^3)^k \cdot \alpha+(\beta^3)^k \cdot \beta$
$=\alpha+\beta=-1$
㉡ : $n=3k+2$(k는 정수) 일 때,
$\alpha^n+\beta^n=(\alpha^3)^k\alpha^2+(\beta^3)^k\beta^2$
$=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$
$=1-2=-1$
㉠, ㉡에서 n이 3의 배수가 아니면
$\alpha^n+\beta^n=-1, \alpha^n\beta^n=(\alpha\beta)^n=1$
따라서 α^n, β^n을 두 근으로 하는 이차방정식은
$x^2+x+1=0$ $\therefore$ ㉮ $=1$, ㉯ $=1$

28. 실계수 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$의 두 근을 α, β라 하면 α는 허수이고, $\dfrac{\beta^2}{\alpha}$은 실수이다. 이 때, $\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^3$의 값은?

① 0　② -1　③ 1　④ i　⑤ $-i$

해설

α가 근이므로 $\overline{\alpha}$도 근이다.
이차방정식은 두 근을 가지므로
$\beta = \overline{\alpha}$, $\overline{\beta} = \alpha \cdots\cdots$ ①
$\dfrac{\beta^2}{\alpha}$이 실수이므로, $\dfrac{\beta^2}{\alpha} = \overline{\left(\dfrac{\beta^2}{\alpha}\right)}$
$\therefore\ \overline{\alpha}\beta^2 = \alpha\overline{\beta}^2$
①에 의하여 $\beta\beta^2 = \alpha\alpha^2$
$\therefore\ \beta^3 = \alpha^3$
$\therefore\ \left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^3 = \dfrac{\beta^3}{\alpha^3} = 1$

29. x의 이차방정식 $x^2 + 2(k-1)x + 2(k^2-1) = 0$의 두 근 중 적어도 하나가 양이 되기 위한 실수 k의 최솟값을 구하면?

① -5　　② -4　　③ -3　　④ -2　　⑤ -1

해설

두 근을 α, β라 하면
(i) 두 근이 모두 양수일 때
$\alpha + \beta = -2(k-1) > 0,\ \alpha\beta = 2(k^2-1) > 0,$
$\frac{D}{4} = (k-1)^2 - 2(k^2-1) \geq 0$
이들의 공통 범위를 구하면
$-3 \leq k < -1 \cdots\cdots$ ㉠
(ii) 한 근이 양수, 한 근이 음수일 때,
$\alpha\beta = 2(k^2-1) < 0$
$\therefore\ -1 < k < 1 \cdots\cdots$ ㉡
(iii) 한 근이 양수, 한 근이 0일 때
$\alpha + \beta = -2(k-1) > 0,\ \alpha\beta = 2(k^2-1) = 0$
$\therefore\ k = -1 \cdots\cdots$ ㉢
구하는 k의 범위는 ㉠ 또는 ㉡ 또는 ㉢이므로
$-3 \leq k \leq 1$
$\therefore$ 최솟값 -3

30. x에 대한 방정식 $x^2-2px+p+2=0$의 모든 근의 실수부가 음이 되도록 하는 실수 p의 값의 범위는?

① $-2<p<0$ ② $-2\le p<0$ ③ $-2<p\le 0$
④ $-2\le p\le 0$ ⑤ $0\le p<2$

해설

$x^2-2px+p+2=0$의 근은
$x=p\pm\sqrt{p^2-p-2}\cdots\cdots$ ㉠
(i) ㉠이 실근일 때
$p^2-p-2\ge 0,\ 2p<0,\ p+2>0$
$\therefore\ -2<p\le -1$
(ii) ㉠이 허근일 때
$p^2-p-2<0$이고 $p<0$
$\therefore\ -1<p<0$
이상에서 구하는 p의 조건은 $-2<p<0$