

1. 이차방정식 $x^2 + 2(k - 1)x + 4 = 0$ 이 중근을 갖도록 하는 상수 k 값들의 합은?

① 1

② -2

③ -1

④ 0

⑤ 2

해설

중근을 가지려면 판별식 $D = 0$

$$\frac{D}{4} = (k - 1)^2 - 4 = 0$$

$$k^2 - 2k - 3 = 0, (k - 3)(k + 1) = 0$$

$$\therefore k = 3, -1$$

2. x 에 대한 이차방정식 $x^2 - 2(m + a - 1)x + m^2 + a^2 - 2b = 0$ 이 m 의 값에 관계없이 중근을 갖는다. $a + b$ 의 값은?

① $\frac{1}{2}$

② 1

③ $\frac{3}{2}$

④ 2

⑤ $\frac{5}{3}$

해설

중근을 가지므로, $\frac{D'}{4} = 0$ 을 만족한다.

$$\frac{D'}{4} = (m + a - 1)^2 - (m^2 + a^2 - 2b) = 0$$

$$m(2a - 2) + (1 - 2a + 2b) = 0$$

m 에 대한 항등식이므로

$$2a - 2 = 0, 1 - 2a + 2b = 0$$

$$\therefore a = 1, b = \frac{1}{2}$$

$$\therefore a + b = \frac{3}{2}$$

3. 이차방정식 $x^2 + (m+1)x + m + 4 = 0$ 이 중근을 가질 때, 모든 실수 m 의 값의 합을 구하면?

① -3

② 0

③ 2

④ 3

⑤ 5

해설

중근을 가지므로, 판별식 $D = 0$

$$D = (m+1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (m+4) = m^2 - 2m - 15 = 0$$

$$(m-5)(m+3) = 0 \quad \therefore m = -3, 5$$

$$\therefore m \text{의 값의 합은 } -3 + 5 = 2$$

4. x 에 대한 이차방정식 $kx^2 + 2(k+1)x + k = 0$ 이 중근을 가질 때 k 의 값은?

① $-\frac{1}{2}$

② $\frac{1}{2}$

③ 1

④ -1

⑤ $\frac{3}{2}$

해설

$$\frac{D}{4} = b'^2 - ac = (k+1)^2 - k^2 = 2k+1 \text{에서}$$

중근을 가질 조건이므로

$$\frac{D}{4} = 0 \text{이어야 한다.}$$

$$2k+1=0 \quad \therefore k = -\frac{1}{2}$$

5. 이차방정식 $x^2 + 2x + k - 3 = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가질 때, 정수 k 의 최대값은?

① -1

② 0

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

서로 다른 두 실근을 갖으려면 판별식이 0보다 커야 한다.

$$D' = 1^2 - (k - 3) > 0$$

$$\therefore k < 4$$

$\therefore$ 최대값은 3 ($\because k$ 는 정수)

6. 이차방정식 $x^2 + 2x + 2 - a = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 갖기 위한 a 의 범위를 구하면?

① $a < 1$

② $a \geq 1$

③ $-1 < a < 1$

④ $a > 1$

⑤ $a \geq -1$

해설

$x^2 + 2x + 2 - a = 0$ 이
서로 다른 두 실근을 갖기 위해서는
판별식 $D > 0$ 이어야 한다.

$$\frac{D}{4} = 1 - (2 - a) > 0$$

$$1 - 2 + a > 0$$

$$\therefore a > 1$$

7. 이차방정식 $3x^2 - 6x + k = 0$ 이 실근을 갖도록 실수 k 의 범위를 정하면?

① $k < 1$

② $k \leq 1$

③ $k < 3$

④ $k \leq 3$

⑤ $1 < k < 3$

해설

$$3x^2 + 6x + k = 0,$$

$$\frac{D}{4} = (-3)^2 - 3 \cdot k \geq 0$$

$$3k \leq 9 \quad \therefore k \leq 3$$

8. x 에 대한 이차방정식 $x^2 + 2(a+3)x + a^2 + 7 = 0$ 이 실근을 갖도록 하는 실수 a 의 값의 범위는?

① $a \geq 0$

② $-1 < a < 0$

③ $-2 < a < 0$

④ $a \geq -\frac{1}{3}$

⑤ $0 \leq a \leq \frac{1}{3}$

해설

주어진 이차방정식이 실근을 갖기 위해서는 판별식 $\frac{D}{4} \geq 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = (a+3)^2 - (a^2 + 7) \geq 0$$

$$a^2 + 6a + 9 - a^2 - 7 \geq 0$$

$$6a + 2 \geq 0 \quad \therefore a \geq -\frac{1}{3}$$

9. x 에 대한 이차방정식 $(k-1)x^2 + 2kx + k-1 = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 갖기 위한 자연수 k 의 최솟값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

(i) 이차방정식이므로 x^2 의 계수는 $k-1 \neq 0$ 이어야 한다.
따라서 $k \neq 1$

(ii) 서로 다른 두 실근을 갖기 위해서는 판별식 $\frac{D}{4} > 0$ 이어야
하므로

$$\frac{D}{4} = k^2 - (k-1)^2 > 0, \quad 2k-1 > 0$$

$$\therefore k > \frac{1}{2}$$

따라서 자연수 k 의 최솟값은 2이다.

10. x 가 실수 일 때, 다음 중 $x + \frac{1}{x}$ 의 값이 될 수 없는 것은? (단, $x \neq 0$)

① -5

② -2

③ 1

④ 3

⑤ 5

해설

$$x + \frac{1}{x} = t \text{ 라 하고,}$$

양변에 x 를 곱하면

$$x^2 + 1 = tx$$

$x^2 - tx + 1 = 0$ 에서 x 는 실수이므로

$$D = t^2 - 4 \geq 0 \quad \therefore t^2 \geq 4, t \leq -2 \text{ 또는 } t \geq 2$$

11. x 에 대한 일차방정식 $5x + a = 2x + 12$ 의 해가 자연수일 때, 자연수 a 의 개수는?

① 1개

② 2개

③ 3개

④ 4개

⑤ 무수히 많다

해설

$$5x - 2x = 12 - a, 3x = 12 - a$$

$$\therefore x = \frac{12 - a}{3}$$

자연수 $a = 1, 2, 3, \dots$ 을 대입했을 때,

$x = \frac{12 - a}{3}$ 가 자연수가 되는 경우는

$12 - a$ 가 3의 배수이면서 $a < 12$ 일 때이다.

i) $a = 3$ 일 때, $x = \frac{12 - 3}{3} = 3$

ii) $a = 6$ 일 때, $x = \frac{12 - 6}{3} = 2$

iii) $a = 9$ 일 때, $x = \frac{12 - 9}{3} = 1$

따라서 자연수 a 의 개수는 3개이다.

12. $|x-2|+|x-3|=1$ 을 만족하는 실수 x 의 개수는?

① 0개

② 1개

③ 2개

④ 3개

⑤ 4개이상

해설

$|x-2|+|x-3|=1$ 에서

i) $x < 2$ 일 때,

$$-(x-2)-(x-3)=1$$

$\therefore x=2$ (성립하지 않음)

ii) $2 \leq x < 3$ 일 때,

$$(x-2)-(x-3)=1$$

$\therefore 0 \cdot x = 0$ (모든 실수)

iii) $x \geq 3$ 일 때,

$$(x-2)+(x-3)=1$$

$\therefore x=3$

13. 방정식 $\left[x + \frac{1}{2}\right]^2 - 3\left[x - \frac{1}{2}\right] - 7 = 0$ 의 해 $a \leq x < b$ 또는 $c \leq x < d$ 에 대하여 $a + b + c + d$ 의 값은? (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대 정수)

① 2

② 4

③ 6

④ 8

⑤ 10

해설

$$\left[x - \frac{1}{2}\right] = \left[x + \frac{1}{2}\right] - 1 \text{ 이므로}$$

$$\left[x + \frac{1}{2}\right]^2 - 3\left[x + \frac{1}{2}\right] - 4 = 0$$

$$\left[x + \frac{1}{2}\right] = 4 \text{ 또는 } \left[x + \frac{1}{2}\right] = -1 \text{ 이므로}$$

$$\frac{7}{2} \leq x < \frac{9}{2}, -\frac{3}{2} \leq x < -\frac{1}{2} \text{ 이다}$$

따라서 구하는 값은

$$\therefore a + b + c + d = 6$$

14. $x^2 + 2\sqrt{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}x + \frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ca}} = 0$ 의 근을 판별하면?
(단, a, b, c 는 서로 다른 양의 실수이다.)

- ① 서로 다른 두 허근
- ② 서로 다른 두 실근
- ③ 서로 같은 두 실근
- ④ 서로 다른 두 허근
- ⑤ 한 근은 실근, 한 근은 허근

해설

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{1}{\sqrt{ab}} - \frac{1}{\sqrt{bc}} - \frac{1}{\sqrt{ca}} \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{c}}\right)^2 - \frac{1}{\sqrt{ab}} - \frac{1}{\sqrt{bc}} - \frac{1}{\sqrt{ca}} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{b}} - \frac{1}{\sqrt{c}}\right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{\sqrt{c}} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2 \right\} > 0 \end{aligned}$$

따라서 서로 두 실근을 갖는다.

(단, $\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{c}}$ 일 때 중근)

15. x 에 관한 이차방정식 $x^2 - 2(k-a)x + k^2 + a^2 - b + 1 = 0$ 이 k 의 값에 관계없이 중근을 갖도록 a, b 의 값을 정하면?

- ① $a = 0, b = 1$ ② $a = 0, b = -1$ ③ $a = -1, b = 0$
④ $a = -1, b = 1$ ⑤ $a = -1, b = 2$

해설

$$\frac{D}{4} = (k-a)^2 - (k^2 + a^2 - b + 1) = 0 \text{에서}$$

$$k^2 - 2ak + a^2 - k^2 - a^2 + b - 1 = 0$$

$$\therefore -2ak + b - 1 = 0$$

이것이 k 값에 관계없이 항상 성립하기 위해서는

$$-2a = 0, b - 1 = 0$$

$$\therefore a = 0, b = 1$$

16. x 에 대한 이차방정식 $x^2 + 2mx + 2m^2 + m - 2 = 0$ 이 두 실근 α, β 를 가질 때, $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2$ 를 m 에 대한 식으로 나타내고, 이 식의 최댓값과 최솟값을 구하면?

- ① 최댓값: 8, 최솟값: 2 ② 최댓값: 10, 최솟값: 3
 ③ 최댓값: 12, 최솟값: $\frac{15}{8}$ ④ 최댓값: 11, 최솟값: $\frac{21}{8}$
 ⑤ 최댓값: 13, 최솟값: $\frac{7}{8}$

해설

주어진 방정식이 실근을 가지므로

$$D/4 = m^2 - (2m^2 + m - 2) \geq 0 \text{에서 } -2 \leq m \leq 1$$

$$\alpha + \beta = -2m, \alpha\beta = 2m^2 + m - 2 \text{이므로}$$

$$\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - \alpha\beta$$

$$= (-2m)^2 - (2m^2 + m - 2)$$

$$= 2m^2 - m + 2$$

$$= 2 \left(m - \frac{1}{4} \right)^2 + \frac{15}{8} \quad (-2 \leq m \leq 1)$$

$$\therefore m = \frac{1}{4} \text{일 때, 최솟값 } \frac{15}{8}$$

$$m = -2 \text{일 때, 최댓값 } 12$$

17. x 의 방정식 $(x-a)(x-b) - cx = 0$ 의 해가 α, β 일 때, x 의 방정식 $(x-\alpha)(x-\beta) + cx = 0$ 의 해를 a, b 로 나타내면?

① $-a, -b$

② a, b

③ $-2a, -2b$

④ $2a, 2b$

⑤ $a, -b$

해설

$x^2 - (a+b+c)x + ab = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로

$\alpha + \beta = a + b + c, \alpha\beta = ab$ 이것을

$x^2 - (\alpha + \beta - c)x + \alpha\beta = 0$ 에 대입하면

$$x^2 - (a+b)x + ab = 0$$

$\therefore (x-a)(x-b) = 0$ 따라서 $x = a, b$

18. α 는 이차방정식 $ax^2 - 2ax + b = 0$ 의 근이고 β 는 이차방정식 $bx^2 - 2ax + a = 0$ 의 근이라고 할 때, $\alpha + \frac{1}{\beta}$ 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

β 가 방정식 $bx^2 - 2ax + a = 0$ 의 근이므로

$$b\beta^2 - 2a\beta + a = 0 \dots\dots \textcircled{1}$$

$ax^2 - 2ax + b = 0$ 에 $x = \frac{1}{\beta}$ 를 대입하면,

①에 의해서

$$a\left(\frac{1}{\beta}\right)^2 - 2a\left(\frac{1}{\beta}\right) + b = \frac{1}{\beta^2}(b\beta^2 - 2a\beta + a) = 0$$

따라서, $x = \frac{1}{\beta}$ 은 방정식 $ax^2 - 2ax + b = 0$ 의 근이다.

그런데 α 도 이 방정식 $ax^2 - 2ax + b = 0$ 의 근이므로 방정식 $ax^2 - 2ax + b = 0$ 의 두 근은 α 와 $\frac{1}{\beta}$ 이다.

따라서, 이차방정식의 근과 계수와의 관계에 의해서 $\alpha + \frac{1}{\beta} = 2$

19. x 에 관한 이차방정식 $x^2 + (m+1)x + (m^2-1) = 0$ 이 실근 α, β 를 가질 때, $\alpha^2 + \beta^2$ 의 최솟값을 구하면? (단, m 은 실수이다.)

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

$$D = (m+1)^2 - 4(m^2-1) \geq 0, 3m^2 - 2m - 5 \leq 0, (3m-5)(m+1) \leq 0$$

$$\therefore -1 \leq m \leq \frac{5}{3}$$

근과 계수와의 관계에서

$$\alpha + \beta = -(m+1), \alpha\beta = m^2 - 1$$

$$\therefore \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$$

$$= \{-(m+1)\}^2 - 2(m^2 - 1)$$

$$= -m^2 + 2m + 3 = -(m-1)^2 + 4$$

따라서, 구하는 최솟값은 0 ($m = -1$ 일 때)

20. 직선 $y = x + a$ 가 포물선 $y = ax^2 + (b+1)x - \frac{b}{2}$ 에 의해 잘려진 선분의 길이의 최솟값을 구하면?

- ① $\sqrt{5}$ ② $\sqrt{6}$ ③ $\sqrt{7}$ ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ $5\sqrt{3}$

해설

교점의 x 좌표를 구하는 식은

$$ax^2 + (b+1)x - \frac{b}{2} = x + a$$

$ax^2 + bx - \frac{b}{2} - a = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하면

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \alpha\beta = \frac{-\frac{b}{2} - a}{a}$$

교점은 $(\alpha, \alpha + a), (\beta, \beta + a)$

$\therefore$ 교점을 이은 선분의 길이를 l 이라 하면

$$l^2 = 2(\beta - \alpha)^2 = 2(\beta + \alpha)^2 - 8\alpha\beta$$

$$= 2\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 8\left(\frac{-\frac{b}{2} - a}{a}\right)$$

$$= 2\left\{\left(\frac{b}{a}\right)^2 + 2\left(\frac{b}{a}\right) + 4\right\}$$

$$= 2\left\{\left(\frac{b}{a} + 1\right)^2 + 3\right\} \geq 6$$

$$\therefore l \geq \sqrt{6}$$

21. 이차방정식 $x^2 + 5x + 1 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$ 의 값을 구하면?

① $\pm\sqrt{3}i$

② $\sqrt{3}i$

③ $\sqrt{7}i$

④ $\pm\sqrt{7}i$

⑤ 0

해설

$D > 0$ 이므로 α, β 는 실수

$$\alpha + \beta = -5, \alpha\beta = 1 \quad \therefore \alpha < 0, \beta < 0$$

$$\begin{aligned} (\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2 &= \alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta} \\ &= \alpha + \beta - 2\sqrt{\alpha\beta} = -7 \end{aligned}$$

$$\therefore \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \sqrt{7}i$$

$\sqrt{-\alpha}i + \sqrt{-\beta}i = (\sqrt{-\alpha} + \sqrt{-\beta})i$ 의 꼴이 되므로 $-\sqrt{7}i$ 가 구하는 값이 될 수 없다.

22. 이차방정식 $x^2 + x + 2 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 한다. $S_n = \alpha^n + \beta^n (n = 1, 2, 3, \dots)$ 이라 할 때, $S_{n+2} + S_{n+1} + 2S_n = (\text{가})$, $S_4 + S_3 + S_2 = (\text{나})$ 이다. 이 때, (가), (나)에 알맞은 수를 차례로 쓰면?

① 0, 1

② 0, 2

③ 0, 3

④ 1, 1

⑤ 1, 2

해설

$$\alpha + \beta = -1, \alpha\beta = 2$$

$$S_{n+2} + S_{n+1} + 2S_n$$

$$= (\alpha^{n+2} + \beta^{n+2}) + (\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}) + 2(\alpha^n + \beta^n)$$

$$= \alpha^n(\alpha^2 + \alpha + 2) + \beta^n(\beta^2 + \beta + 2) = 0$$

$$(\because \alpha^2 + \alpha + 2 = 0, \beta^2 + \beta + 2 = 0)$$

$$n = 2 \text{를 대입하면 } S_4 + S_3 + 2S_2 = 0$$

$$\therefore S_4 + S_3 + S_2 = -S_2$$

$$= -(\alpha^2 + \beta^2)$$

$$= -\{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta\}$$

$$= -(1 - 4) = 3$$

23. 이차방정식 $x^2 - 2x - 1 = 0$ 의 두 근을 α, β 라고 할 때, $\left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} - \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\right)^2$ 의 값은?

① -4

② -2

③ 0

④ 2

⑤ 4

해설

$x^2 - 2x - 1 = 0$ 에서 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 2, \alpha\beta = -1$$

$$\alpha\beta < 0 \text{ 이므로 } \frac{\beta}{\alpha} < 0, \frac{\alpha}{\beta} < 0$$

$$\begin{aligned} \therefore \left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} - \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\right)^2 &= \frac{\beta}{\alpha} - 2\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} + \frac{\alpha}{\beta} \\ &= \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} + 2\left(\because \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} = -\sqrt{\frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{\beta}}\right) \\ &= \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta} + 2 \\ &= -4 \end{aligned}$$

해설

24. p 와 q 가 소수이고, $x^2 - px + q = 0$ 이 서로 다른 두 개의 양의 정수근을 가질 때, 다음 중 옳은 문장은 몇 개인가?

- (가) 두 근의 차는 홀수이다.
 (나) 적어도 한 근은 소수이다.
 (다) $p^2 - q$ 는 소수이다.
 (라) $p + q$ 는 소수이다.

① 1개

② 2개

③ 3개

④ 4개

⑤ 0개

해설

$x^2 - px + q = 0$ 의 서로 다른 양의 정수근을 α, β 라 하면
 $\alpha + \beta = p \dots\dots \textcircled{㉠}$

$\alpha\beta = q \dots\dots \textcircled{㉡}$ 이다.

그런데, q 가 소수이므로 $\textcircled{㉡}$ 에서 두 근은 1과 q 이다.

$\therefore \textcircled{㉠}$ 에서 $1 + q = p \therefore p - q = 1$

그런데 p 도 소수이므로 두 소수의 차이가 1인 경우는 $p = 3, q = 2$ 일 때 뿐이다.

$x^2 - 3x + 2 = 0$ 에서 $(x - 1)(x - 2) = 0$

$\therefore x = 1, 2$

따라서, 주어진 문장은 모두 옳다.

25. 실수를 계수로 갖는 이차방정식 $x^2 - (m-1)x + (m+1) = 0$ 이 허근 α 를 갖고, α^3 이 실수일 때, m 의 값은?

① 0

② 1

③ 3

④ 0, 3

⑤ 0, 1, 3

해설

α^3 이 실수이므로 $\bar{\alpha}^3 = \alpha^3$,

$$(\alpha - \bar{\alpha})(\alpha^2 + \alpha\bar{\alpha} + \bar{\alpha}^2) = 0$$

α 는 허수이므로 $\alpha \neq \bar{\alpha}$

$$\therefore \alpha^2 + \alpha\bar{\alpha} + \bar{\alpha}^2 = 0 \cdots \cdots (i)$$

근과 계수와의 관계에서

$$\alpha + \bar{\alpha} = m-1, \alpha\bar{\alpha} = m+1$$

$$(i) \text{은 } (\alpha + \bar{\alpha})^2 - \alpha\bar{\alpha} = 0, (m-1)^2 - (m+1) = 0$$

$$m^2 - 3m = m(m-3) = 0$$

$$\therefore m = 0, 3$$

이차방정식 $x^2 - (m-1)x + (m+1) = 0$ 이

허근을 가지므로 $D = (m-1)^2 - 4(m+1) < 0$

$m = 0, 3$ 은 이 부등식을 만족시키므로 구하는 답이 된다.

26. 실수 x, y, z 가 $x + y + z = 6$, $xy + yz + zx = 9$ 를 만족할 때 x 의 최대값을 M , 최소값을 m 이라 한다. 이 때 $M - m$ 의 값을 구하면 ?

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

$$y + z = 6 - x,$$

$$yz = 9 - x(y + z) = 9 - x(6 - x) = (x - 3)^2$$

실수 y, z 를 두 근으로 하는 이차방정식을 만들면

$$t^2 - (6 - x)t + (x - 3)^2 = 0$$

$$D = (6 - x)^2 - 4(x - 3)^2 \geq 0 \text{에서 } x(x - 4) \leq 0$$

$$\therefore 0 \leq x \leq 4$$

$$M = 4, m = 0 \quad \therefore M - m = 4$$

27. 방정식 $x^2 + x + 1 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하자. 3의 배수가 아닌 정수 n 에 대하여 α^n, β^n 을 두 근으로 하는 이차방정식은 $x^2 + (\textcircled{㉠})x + (\textcircled{㉡}) = 0$ 이다. ㉠과 ㉡에 알맞은 수의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

α, β 는 방정식 $x^2 + x + 1 = 0$ 의 두 근이므로

$$\alpha^2 + \alpha + 1 = 0, \beta^2 + \beta + 1 = 0$$

$$\therefore \alpha^3 = 1, \beta^3 = 1$$

한편, 근과 계수와의 관계에서 $\alpha + \beta = -1, \alpha\beta = 1$

㉠ : $n = 3k + 1$ (k 는 정수) 일 때,

$$\alpha^n + \beta^n = (\alpha^3)^k \cdot \alpha + (\beta^3)^k \cdot \beta$$

$$= \alpha + \beta = -1$$

㉡ : $n = 3k + 2$ (k 는 정수) 일 때,

$$\alpha^n + \beta^n = (\alpha^3)^k \alpha^2 + (\beta^3)^k \beta^2$$

$$= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$$

$$= 1 - 2 = -1$$

㉠, ㉡에서 n 이 3의 배수가 아니면

$$\alpha^n + \beta^n = -1, \alpha^n \beta^n = (\alpha\beta)^n = 1$$

따라서 α^n, β^n 을 두 근으로 하는 이차방정식은

$$x^2 + x + 1 = 0 \therefore \textcircled{㉠} = 1, \textcircled{㉡} = 1$$

28. 실계수 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하면 α 는 허수이고, $\frac{\beta^2}{\alpha}$ 은 실수이다. 이 때, $\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^3$ 의 값은?

① 0

② -1

③ 1

④ i

⑤ $-i$

해설

α 가 근이므로 $\bar{\alpha}$ 도 근이다.

이차방정식은 두 근을 가지므로

$$\beta = \bar{\alpha}, \bar{\beta} = \alpha \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\frac{\beta^2}{\alpha} \text{이 실수이므로, } \frac{\beta^2}{\alpha} = \overline{\left(\frac{\beta^2}{\alpha}\right)}$$

$$\therefore \bar{\alpha}\beta^2 = \alpha\bar{\beta}^2$$

$$\textcircled{1} \text{에 의하여 } \beta\beta^2 = \alpha\alpha^2$$

$$\therefore \beta^3 = \alpha^3$$

$$\therefore \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^3 = \frac{\beta^3}{\alpha^3} = 1$$

29. x 의 이차방정식 $x^2 + 2(k-1)x + 2(k^2-1) = 0$ 의 두 근 중 적어도 하나가 양이 되기 위한 실수 k 의 최솟값을 구하면?

① -5

② -4

③ -3

④ -2

⑤ -1

해설

두 근을 α, β 라 하면

(i) 두 근이 모두 양수일 때

$$\alpha + \beta = -2(k-1) > 0, \alpha\beta = 2(k^2-1) > 0,$$

$$\frac{D}{4} = (k-1)^2 - 2(k^2-1) \geq 0$$

이들의 공통 범위를 구하면

$$-3 \leq k < -1 \dots\dots \textcircled{\Gamma}$$

(ii) 한 근이 양수, 한 근이 음수일 때,

$$\alpha\beta = 2(k^2-1) < 0$$

$$\therefore -1 < k < 1 \dots\dots \textcircled{\Delta}$$

(iii) 한 근이 양수, 한 근이 0일 때

$$\alpha + \beta = -2(k-1) > 0, \alpha\beta = 2(k^2-1) = 0$$

$$\therefore k = -1 \dots\dots \textcircled{\ominus}$$

구하는 k 의 범위는 $\textcircled{\Gamma}$ 또는 $\textcircled{\Delta}$ 또는 $\textcircled{\ominus}$ 이므로

$$-3 \leq k \leq 1$$

$\therefore$ 최솟값 -3

30. x 에 대한 방정식 $x^2 - 2px + p + 2 = 0$ 의 모든 근의 실수부가 음이 되도록 하는 실수 p 의 값의 범위는?

① $-2 < p < 0$

② $-2 \leq p < 0$

③ $-2 < p \leq 0$

④ $-2 \leq p \leq 0$

⑤ $0 \leq p < 2$

해설

$x^2 - 2px + p + 2 = 0$ 의 근은

$$x = p \pm \sqrt{p^2 - p - 2} \dots\dots \textcircled{7}$$

(i) $\textcircled{7}$ 이 실근일 때

$$p^2 - p - 2 \geq 0, \quad 2p < 0, \quad p + 2 > 0$$

$$\therefore -2 < p \leq -1$$

(ii) $\textcircled{7}$ 이 허근일 때

$$p^2 - p - 2 < 0 \text{이고 } p < 0$$

$$\therefore -1 < p < 0$$

이상에서 구하는 p 의 조건은 $-2 < p < 0$