1. 세 점 A $(2,\ 1)$, B $(-k+1,\ 3)$, C $(1,\ k+2)$가 같은 직선위에 있도록 하는 실수 k의 값들의 합은?

① -2 ② -1 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

세 점 $\mathrm{A}(2,1)$, $\mathrm{B}(-\mathrm{k}+1,3)$, $\mathrm{C}(1,\mathrm{k}+2)$ 가 같은 직선 위에 있으려면

직선 AB 와 AC 의 기울기가 같아야 하므로

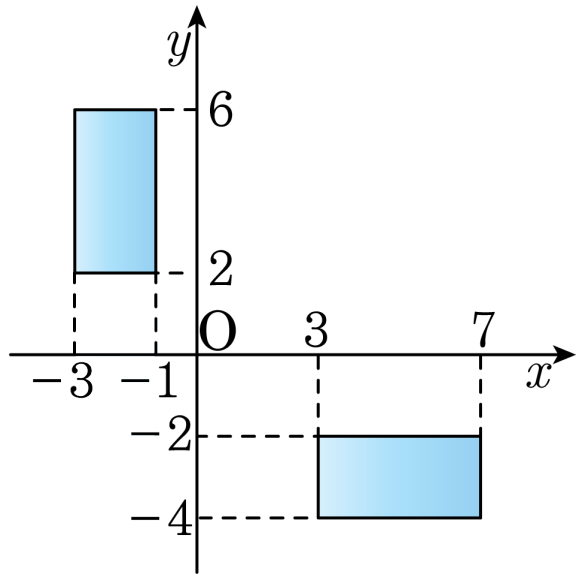
$$\frac{3-1}{(-k+1)-2}=\frac{(k+2)-1}{1-2}$$

$$\frac{2}{-k-1}=\frac{k+1}{-1},$$

$$(k+1)^2=2\ ,$$

$\therefore\ k=-1\pm\sqrt{2}$ 따라서 구하는 합은 $(-1+\sqrt{2})+(-1-\sqrt{2})=-2$

2. 다음 그림의 좌표평면 위에서 두 직사각형의 넓이를 모두 이등분하는 직선의 기울기는?



① $-\frac{3}{2}$ ② -1 ③ $-\frac{3}{4}$

④ $-\frac{7}{8}$ ⑤ $-\frac{1}{2}$

해설

직사각형의 넓이는 두 대각선의 교점을 지나는 직선에 의하여 이등분된다.

따라서, 두 대각선의 교점의 좌표는 각각 A(−2, 4), B(5, −3) 이므로

직선 AB의 기울기는 $\frac{-3-4}{5-(-2)} = -1$

3. 평행한 두 직선 $3x-5y+2=0$, $3x-5y-1=0$ 사이의 거리는?

① $\frac{2\sqrt{17}}{17}$ ② $\frac{3\sqrt{17}}{17}$ ③ $\frac{\sqrt{34}}{34}$

④ $\frac{2\sqrt{34}}{34}$ ⑤ $\frac{3\sqrt{34}}{34}$

해설

$3x-5y+2=0$ 위의 점 $\left(0, \frac{2}{5}\right)$ 에서

$3x-5y-1=0$ 까지의 거리

$$\frac{\left|3\cdot 0-5\cdot\frac{2}{5}-1\right|}{\sqrt{9+25}}=\frac{3}{\sqrt{34}}=\frac{3\sqrt{34}}{34}$$

4. 이차방정식 $x^2 + y^2 - 4x - 2y - k = 0$ 이 원을 나타내도록 상수 k 의 값의 범위를 정하면?

① $k < -5$ ② $k > -5$ ③ $-5 < k < 5$

④ $k < \sqrt{5}$ ⑤ $k > -\sqrt{5}$

해설

원 $x^2 + y^2 - 4x - 2y - k = 0$ 을 표준형으로 고치면,
$(x-2)^2 + (y-1)^2 = k + 5$
이 때, $k + 5 > 0$ 이어야 하므로 $k > -5$

5. 서로 다른 두 점에서 만나는 두 원 O, O′ 이 있다. 이 두 원의 반지름을 각각 r, r' 이라 하고 두 원의 중심 간의 거리를 d라 할 때, 이 두 원의 성질을 옳게 나타낸 것은?

① $d > r + r'$

② $d < |r - r'|$

③ 공통외접선은 1개이다.

④ 공통내접선은 2개이다.

⑤ 두 원의 공통현은 1개이다.

해설

① $d < r + r'$
② $d > |r - r'|$
③ 공통외접선은 2개이다.
④ 공통내접선은 없다.

6. 원 $x^2+y^2=9$ 위의 점 (a,b) 에서의 접선이 점 $(6,6)$ 을 지날 때, ab 의 값은?

① $-\frac{27}{8}$ ② $-\frac{15}{8}$ ③ $-\frac{7}{8}$ ④ $\frac{5}{8}$ ⑤ $\frac{15}{8}$

해설

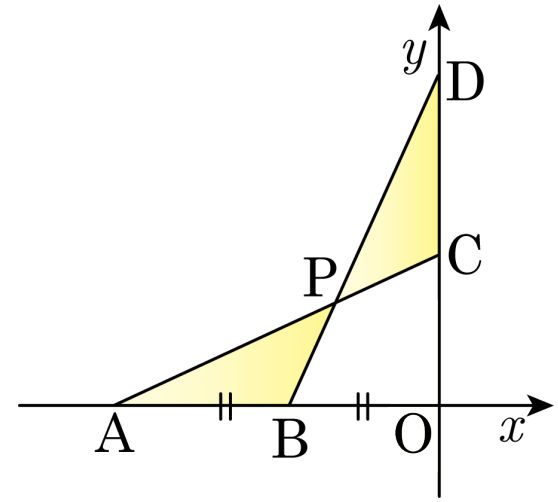
원 위의 점 (a,b) 에서의 접선의 방정식은
$ax+by=9$ 이고
이 접선이 점 $(6,\ 6)$ 을 지나므로

$6a+6b=9 \qquad \therefore a+b=\frac{3}{2}$

또, 점 (a,b) 는 원 위의 점이므로
$a^2+b^2=9$
이때, $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$ 에서

$9=\frac{9}{4}-2ab \qquad \therefore ab=-\frac{27}{8}$

7. 다음 그림에서 점 B 가 선분 AO 의 중점이고, 사각형 PBOC 의 넓이는 어두운 두 삼각형 PAB, PCD 의 넓이의 합과 같다. 직선 BD 의 기울기가 3 일 때, 직선 AC 의 기울기는?



① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ $\frac{4}{5}$
④ $\frac{5}{6}$ ⑤ $\frac{6}{7}$

해설

$\triangle ABP = \triangle BOP$ 이므로 $\triangle COP = \triangle CDP$
따라서, $\overline{CO} = \overline{CD}$, $\overline{BO} = k$ 라 하면
직선 BD 의기울기가 3 이므로

$\overline{OD} = 3k$ 이고 $\overline{CO} = \frac{3}{2}k$

직선 AC 의 기울기는 $\frac{\frac{3}{2}k}{2k} = \frac{3}{4}$

8. 직선 $kx-y+3k=1$는 k값에 관계없이 항상 일정한 점 A를 지난다. 이 정점 A의 좌표는?

① $A(-3,-1)$ ② $A(-2,-1)$ ③ $A(-1,-1)$

④ $A(1,-1)$ ⑤ $A(2,1)$

해설

주어진 식을 k에 대하여 정리하면

$(x+3)k-(y+1)=0$

위 식은 k값에 관계없이

$x+3=0,\ y+1=0$의 교점을 지난다.

$\therefore\ x=-3,\ y=-1$

$\therefore\ A(-3,\ -1)$

9. 점 $(4, 1)$ 과 직선 $4x - 3y - 9 = 0$ 사이의 거리를 구하면?

① 1 ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{2}{5}$ ④ $\frac{3}{5}$ ⑤ $\frac{4}{5}$

해설

점과 직선 사이의 거리 구하는 공식을

이용하면,$\Rightarrow$ $\frac{|4 \times 4 + 1 \times (-3) - 9|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{4}{5}$

10. 두 직선 $2x-y-1=0$, $x+2y-1=0$ 으로부터 같은 거리에 있는 점 P의 자취의 방정식 중에서 기울기가 양수인 것은?

① $y=x$ ② $y=\frac{1}{2}x$ ③ $y=\frac{1}{3}x$

④ $y=\frac{1}{4}x$ ⑤ $y=\frac{1}{5}x$

해설

P$(x,\ y)$ 라 하면,

(i) $2x-y-1=0$ 까지의 거리 d_1 은

$$d_1=\frac{|2x-y-1|}{\sqrt{4+1}}$$

(ii) $x+2y-1=0$ 까지의 거리 d_2 는

$$d_2=\frac{|x+2y-1|}{\sqrt{1+4}}$$

$d_1=d_2$ 이므로 $|2x-y-1|=|x+2y-1|$

$\therefore\ 2x-y-1=\pm(x+2y-1)$

즉, $x-3y=0$, $3x+y-2=0$

그런데 기울기가 양수이므로 $x-3y=0$

$\therefore\ y=\frac{1}{3}x$

11. 두 원 $x^2+y^2=1$, $(x-4)^2+y^2=4$ 의 공통외접선의 길이로 알맞은 것은?

① $\sqrt{15}$ ② $\sqrt{13}$ ③ $\sqrt{11}$ ④ $\sqrt{10}$ ⑤ $\sqrt{7}$

해설

중심 $(0,0)$ 과 $(4,0)$ 사이의 거리를 구하면 4 이다.
두 원의 반지름의 길이가 1 과 2 이로 공통외접선의 길이는 $\sqrt{4^2-1}=\sqrt{15}$ 이다.

12. 점 $\mathrm{A}(-4, 1)$ 에서 원 $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ 에 그은 접선의 접점을 B라 할 때, $\overline{\mathrm{AB}}$ 의 길이는?

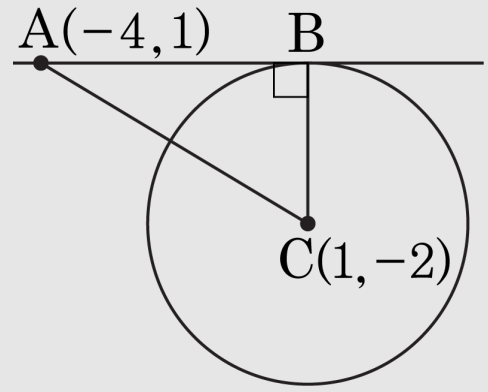
① 3 ② 5 ③ 7 ④ 8 ⑤ 10

해설

$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ 에서

$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$

한편, 다음 그림에서



$\overline{\mathrm{AC}} = \sqrt{(-4-1)^2 + (1+2)^2} = \sqrt{34}$

또한, 반지름의 길이가 3 이므로 접선의 길이 $\overline{\mathrm{AB}}$ 는

$\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{\overline{\mathrm{AC}}^2 - \overline{\mathrm{BC}}^2} = \sqrt{\left(\sqrt{34}\right)^2 - 3^2} = 5$

13. 원 $x^2+y^2-2x-2y+1=0$ 위의 점에서 직선 $y=-x+4$에 이르는 최소 거리는?

① $\sqrt{2}-1$ ② $\sqrt{2}$ ③ 3

④ $\sqrt{2}+1$ ⑤ 3

해설

$x^2+y^2-2x-2y+1=0$은 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$이므로
원의 중심 $(1,1)$에서 직선 $x+y-4=0$ 까지의 거리 d는

$$d=\frac{|1+1-4|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt{2}$$

따라서 구하는 최소 거리는
$d-$(원의 반지름의 길이) $=\sqrt{2}-1$