

1. 다음 사차방정식의 실근의 합을 구하여라.

$$x^4 - 3x^3 + 3x^2 + x - 6 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$x^4 - 3x^3 + 3x^2 + x - 6 = 0$ 에서 $x = -1, x = 2$ 를 대입하면 성립하므로
조립제법을 이용하여 인수분해하면

-1	1	-3	3	1	-6
		-1	4	7	6
2	1	-4	7	-6	0
		2	-4	6	
	1	-2	3	0	

$(x+1)(x-2)(x^2-2x+3) = 0$
 $\therefore x = -1$ 또는 $x = 2$ 또는 $x = 1 \pm \sqrt{2}i$
따라서 실수근은 $-1, 2$ 이므로 $-1 + 2 = 1$ 이다.

2. $A = \frac{1+i}{1-i}$ 일 때 $1+A+A^2+A^3+\cdots+A^{100}$ 을 간단히 하면?

- ① 1 ② i ③ 0 ④ -1 ⑤ $-i$

해설

$$A = \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = i$$

$$A^2 = i^2 = -1, A^3 = i^3 = -i, A^4 = i^4 = 1$$

$$\therefore 1+A+A^2+A^3+\cdots+A^{100}$$

$$= 1 + (A+A^2+A^3+A^4) + \cdots$$

$$+(A^{97}+A^{98}+A^{99}+A^{100})$$

$$= 1 + (i-1-i+1) + (i-1-i+1) + \cdots + (i-1-i+1)$$

$$= 1$$

3. 다음 방정식의 모든 해의 곱을 구하여라.

$$(x^2 - 2x)(x^2 - 2x - 2) - 3 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

$(x^2 - 2x)(x^2 - 2x - 2) - 3 = 0$ 에서
 $x^2 - 2x = t$ 로 놓으면
 $t(t - 2) - 3 = 0,$
 $t^2 - 2t - 3 = 0$
 $(t - 3)(t + 1) = 0$
 $\therefore t = 3$ 또는 $t = -1$
(i) $t = 3$, 즉 $x^2 - 2x = 3$ 일 때
 $x^2 - 2x - 3 = 0$
 $(x - 3)(x + 1) = 0$
 $\therefore x = -1$ 또는 $x = 3$
(ii) $t = -1$, 즉 $x^2 - 2x = -1$ 일 때
 $x^2 - 2x + 1 = 0$
 $(x - 1)^2 = 0$
 $\therefore x = 1$ (중근)
따라서, $-1 \times 3 \times 1 = -3$

4. 방정식 $x^3 = 1$ 의 한 허근을 ω 라 할 때, 보기 중에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $\omega^2 + \omega + 1 = 0$

㉡ $\omega^2 = 1$

㉢ $\omega^{99} + \frac{1}{\omega^{99}} = 2$

㉣ $\omega^{1005} + \omega^{1004} = -\omega$

㉤ $\omega^{18} + \omega^{99} + \frac{1}{\omega^{99}} = 3$

① ㉠, ㉢

② ㉡

③ ㉠, ㉢, ㉣

④ ㉢, ㉣, ㉤

⑤ ㉠, ㉢, ㉣, ㉤

해설

$$\begin{aligned} x^3 - 1 &= 0, \\ (x-1)(x^2 + x + 1) &= 0 \\ \Rightarrow \omega^3 &= 1, \omega^2 + \omega + 1 = 0, \\ \omega^2 &= -1 - \omega \cdots \text{㉠, ㉡} \\ \omega^{99} + \frac{1}{\omega^{99}} &= (\omega^3)^{33} + \frac{1}{(\omega^3)^{33}} = 2 \cdots \text{㉢} \\ \omega^{1005} + \omega^{1004} &= (\omega^3)^{335} + (\omega^3)^{334} \times \omega^2 \\ &= \omega^2 + 1 = -\omega \cdots \text{㉣} \\ \omega^{18} + \omega^{99} + \frac{1}{\omega^{99}} &= (\omega^3)^6 + (\omega^3)^{33} + \frac{1}{(\omega^3)^{33}} = 3 \cdots \text{㉤} \end{aligned}$$

5. $x = \alpha, y = \beta$ 가 연립방정식
- $$\begin{cases} x^2 - xy - 2y^2 = -2 \\ 2x^2 - 3xy - 2y^2 = -3 \end{cases}$$
의 해일 때, $\alpha^2 + \beta^2$ 의 값은?
- ① 2

② 4

③ 6

④ 8

⑤ 10

해설

$$\begin{cases} x^2 - xy - 2y^2 = -2 & \dots ① \\ 2x^2 - 3xy - 2y^2 = -3 & \dots ② \end{cases}$$

상수항을 소거하기 위해 ① $\times 3$ - ② $\times 2$ 하면
 $x^2 - 3xy + 2y^2 = 0, (x - 2y)(x - y) = 0,$
 $x = 2y$ or $x = y$
 $x = 2y$ 를 ① 식에 대입하면
 $4y^2 - 2y^2 - 2y^2 = -2, 0 = -2$ 불능
 $x = y$ 를 ①식에 대입하면
 $y^2 - y^2 - 2y^2 = -2$
 $y^2 = 1, y = \pm 1, x = \pm 1$
 $\therefore \alpha^2 + \beta^2 = 1 + 1 = 2$

6. 방정식 $x^2+x+2=0$ 의 한 해근을 ω 라 할 때, $f(x)=ax^2+bx+12(a \neq 0)$ 에 대하여 $f(\omega)=3\omega$ 를 만족한다. 이 때, 실수 a, b 의 합은?

① 12 ② -12 ③ 15 ④ -15 ⑤ 18

해설

$x^2+x+2=0$ 의 한 해근이 ω 이므로
 $\omega^2+\omega+2=0 \quad \therefore \omega^2=-\omega-2$
 $f(\omega)=a\omega^2+b\omega+12=a(-\omega-2)+b\omega+12$
 $= (b-a)\omega+(12-2a)$
 $f(\omega)=3\omega$ 이므로
 $(b-a)\omega+(12-2a)=3\omega$
 $b-a=3, 12-2a=0 \quad (\because \omega \text{는 허수})$
 $\therefore a=6, b=9$

7. $1 \leq x \leq a$ 에서 함수 $y = x^2 - 2x - 3a$ 의 최댓값과 최솟값의 차가 4 일 때, a 의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

$$y = x^2 - 2x - 3a = (x - 1)^2 - 3a - 1$$

$$\text{최솟값: } x = 1 \text{ 일 때 } \Rightarrow -3a - 1$$

$$\text{최댓값: } x = a \text{ 일 때 } \Rightarrow a^2 - 5a$$

$$\therefore a^2 - 5a - (-3a - 1) = 4$$

$$\Rightarrow a^2 - 2a - 3 = 0$$

$$a = 3 \quad (\because a > 1)$$

8. 이차함수 $y = -x^2 - 2kx + 4k$ 의 최댓값이 M 일 때, M 의 최솟값을 구하면?

① 1 ② -2 ③ 3 ④ -4 ⑤ 5

해설

$$y = -x^2 - 2kx + 4k = -(x + k)^2 + k^2 + 4k$$

$$M = k^2 + 4k \text{ 이므로}$$

$$M = (k + 2)^2 - 4 \text{ 이다.}$$

따라서 M 의 최솟값은 -4 이다.

9. 방정식 $ax^2 + ibx + c = 0$ 에 대하여 다음 설명 중 타당한 것은?

- ① z 가 주어진 방정식의 근이면 $\bar{z}$ 도 주어진 방정식의 근이다.
- ② z 가 주어진 방정식의 근이면 $i\bar{z}$ 도 주어진 방정식의 근이다.
- ③ z 가 주어진 방정식의 근이면 iz 는 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 근이다.
- ④ z 가 주어진 방정식의 근이면 $-\bar{z}$ 도 주어진 방정식의 근이다.
- ⑤ z 가 주어진 방정식의 근이면 $-i\bar{z}$ 는 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 근이다.

해설

z 가 주어진 방정식의 근이라면
 a, b, c 는 실수이므로 켈레복소수의 성질을 적용하면
 $az^2 + ibz + c = 0, \overline{az^2 + ibz + c} = 0$
 $a(\bar{z}^2) - ib\bar{z} + c = 0,$
 $a(-\bar{z})^2 + ib(-\bar{z}) + c = 0$ 이므로
 $-\bar{z}$ 도 주어진 방정식의 근이다.

10. $x = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3}i)$ 일 때 $x + \frac{1}{x + \frac{1}{x + \frac{1}{x + \frac{1}{x}}}}$ 의 값은?

① 0

② 1

③ 2

④ $\frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$

⑤ $\frac{-5 + \sqrt{3}i}{4}$

해설

$$x = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3}i) \text{ 에서 } 2x + 1 = \sqrt{3}i$$

이 식의 양변을 제곱하여 정리하면

$$x^2 + x + 1 = 0 \therefore x + \frac{1}{x} = -1$$

$$\begin{aligned} \therefore (\text{준식}) &= x + \frac{1}{x + \frac{1}{x + \frac{1}{x + \frac{1}{x}}}} \\ &= x + \frac{1}{x + \frac{1}{x^2 - x + 1}} \\ &= x + \frac{x - 1}{-2x^2 + x - 1} \\ &= \frac{-2x^2 + x - 1}{-2x^2 + x - 1} \\ &= \frac{-2x^2 + x - 1}{-2(-x - 1) + x - 1} \\ &= \frac{-2x^2 + x - 1}{3x + 1} \\ &= \frac{-2x}{3} - \frac{1}{2x} \\ &= -\frac{2}{3} + \frac{1}{1 - \sqrt{3}i} \\ &= \frac{-5 + \sqrt{3}i}{4} \end{aligned}$$