1. 다음 사차방정식의 실근의 합을 구하여라.

$$x^4 - 3x^3 + 3x^2 + x - 6 = 0$$

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 1

해설

$x^4 - 3x^3 + 3x^2 + x - 6 = 0$ 에서 $x = -1,\ x = 2$ 를 대입하면 성립하므로

조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{c|ccccc} -1 & 1 & -3 & 3 & 1 & -6 \\ & & -1 & 4 & 7 & 6 \\ \hline 2 & 1 & -4 & 7 & -6 & \boxed{0} \\ & & 2 & -4 & 6 & \\ \hline & 1 & -2 & 3 & \boxed{0} & \end{array}$$

$(x+1)(x-2)(x^2-2x+3) = 0$

$\therefore\ x = -1$ 또는 $x = 2$ 또는 $x = 1 \pm \sqrt{2}i$

따라서 실근은 $-1,\ 2$이므로 $-1 + 2 = 1$이다.

2. $A=\dfrac{1+i}{1-i}$ 일 때 $1+A+A^2+A^3+\cdots+A^{100}$ 을 간단히 하면?

① 1 ② i ③ 0 ④ -1 ⑤ $-i$

해설

$$A=\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=i$$

$A^2=i^2=-1,\ A^3=i^3=-i,\ A^4=i^4=1$

$\therefore\ 1+A+A^2+A^3+\cdots+A^{100}$

$=1+(A+A^2+A^3+A^4)+\cdots$

$+(A^{97}+A^{98}+A^{99}+A^{100})$

$=1+(i-1-i+1)+(i-1-i+1)+\cdots+(i-1-i+1)$

$=1$

3. 다음 방정식의 모든 해의 곱을 구하여라.

$$(x^2-2x)(x^2-2x-2)-3=0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

$(x^2-2x)(x^2-2x-2)-3=0$ 에서

$x^2-2x=t$ 로 놓으면

$t(t-2)-3=0,$

$t^2-2t-3=0$

$(t-3)(t+1)=0$

$\therefore\ t=3$ 또는 $t=-1$

(i) $t=3$, 즉 $x^2-2x=3$ 일 때

$x^2-2x-3=0$

$(x-3)(x+1)=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=3$

(ii) $t=-1$, 즉 $x^2-2x=-1$ 일 때

$x^2-2x+1=0$

$(x-1)^2=0$

$\therefore\ x=1$ (중근)

따라서, $-1\times3\times1=-3$

4. 방정식 $x^3 = 1$의 한 허근을 ω라 할 때, 보기 중에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

ㄱ $\omega^2 + \omega + 1 = 0$

ㄴ $\omega^2 = 1$

ㄷ $\omega^{99} + \dfrac{1}{\omega^{99}} = 2$

ㄹ $\omega^{1005} + \omega^{1004} = -\omega$

ㅁ $\omega^{18} + \omega^{99} + \dfrac{1}{\omega^{99}} = 3$

① ㄱ, ㄷ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ, ㄹ

④ ㄷ, ㄹ, ㅁ ⑤ ㄱ, ㄷ, ㄹ, ㅁ

해설

$x^3 - 1 = 0,$

$(x-1)(x^2+x+1) = 0$

$\Rightarrow \omega^3 = 1, \omega^2 + \omega + 1 = 0,$

$\omega^2 = -1 - \omega \cdots$ ㄱ, ㄴ

$\omega^{99} + \dfrac{1}{\omega^{99}}$

$= (\omega^3)^{33} + \dfrac{1}{(\omega^3)^{33}} = 2 \cdots$ ㄷ

$\omega^{1005} + \omega^{1004}$

$= (\omega^3)^{335} + (\omega^3)^{334} \times \omega^2$

$= \omega^2 + 1 = -\omega \cdots$ ㄹ

$\omega^{18} + \omega^{99} + \dfrac{1}{\omega^{99}}$

$= (\omega^3)^6 + (\omega^3)^{33} + \dfrac{1}{(\omega^3)^{33}} = 3 \cdots$ ㅁ

5. $x=\alpha,\ y=\beta$가 연립방정식

$$\begin{cases} x^2 - xy - 2y^2 = -2 \\ 2x^2 - 3xy - 2y^2 = -3 \end{cases}$$

의 해일 때, $\alpha^2+\beta^2$의 값은?

① 2　　② 4　　③ 6　　④ 8　　⑤ 10

해설

$$\begin{cases} x^2 - xy - 2y^2 = -2 & \cdots ① \\ 2x^2 - 3xy - 2y^2 = -3 & \cdots ② \end{cases}$$

상수항을 소거하기 위해 ①$\times 3 -$ ②$\times 2$하면

$x^2 - 3xy + 2y^2 = 0,\ (x-2y)(x-y)=0,$

$x = 2y\ or\ x = y$

$x=2y$를 ① 식에 대입하면

$4y^2 - 2y^2 - 2y^2 = -2,\ 0 = -2$불능

$x = y$를 ①식에 대입하면

$y^2 - y^2 - 2y^2 = -2$

$y^2 = 1,\ y \pm 1,\ x \pm 1$

$\therefore\ \alpha^2 + \beta^2 = 1 + 1 = 2$

6. 방정식 $x^2+x+2=0$의 한 허근을 ω라 할 때, $f(x)=ax^2+bx+12(a \neq 0)$에 대하여 $f(\omega)=3\omega$를 만족한다. 이 때, 실수 a, b의 합은?

① 12 ② -12 ③ 15 ④ -15 ⑤ 18

해설

$x^2+x+2=0$의 한 허근이 ω이므로

$\omega^2+\omega+2=0 \quad \therefore \ \omega^2=-\omega-2$

$f(\omega)=a\omega^2+b\omega+12=a(-\omega-2)+b\omega+12$

$\qquad =(b-a)\omega+(12-2a)$

$f(\omega)=3\omega$이므로

$(b-a)\omega+(12-2a)=3\omega$

$b-a=3,\ 12-2a=0$ ($\because$ ω는 허수)

$\therefore \ a=6,\ b=9$

7. $1 \le x \le a$ 에서 함수 $y = x^2 - 2x - 3a$ 의 최댓값과 최솟값의 차가 4 일 때, a 의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

$y = x^2 - 2x - 3a = (x-1)^2 - 3a - 1$

최솟값 : $x = 1$ 일 때 $\Rightarrow -3a - 1$

최댓값 : $x = a$ 일 때 $\Rightarrow a^2 - 5a$

$\therefore a^2 - 5a - (-3a - 1) = 4$

$\Rightarrow a^2 - 2a - 3 = 0$

$a = 3 \ (\because a > 1)$

8. 이차함수 $y = -x^2 - 2kx + 4k$ 의 최댓값이 M 일 때, M 의 최솟값을 구하면?

① 1　　② -2　　③ 3　　④ -4　　⑤ 5

해설

$y = -x^2 - 2kx + 4k = -(x+k)^2 + k^2 + 4k$

$M = k^2 + 4k$ 이므로

$M = (k+2)^2 - 4$ 이다.

따라서 M 의 최솟값은 -4 이다.

9. 방정식 $ax^2 + ibx + c = 0$에 대하여 다음 설명 중 타당한 것은?

① z가 주어진 방정식의 근이면 $\bar{z}$도 주어진 방정식의 근이다.

② z가 주어진 방정식의 근이면 $i\bar{z}$도 주어진 방정식의 근이다.

③ z가 주어진 방정식의 근이면 iz는 $ax^2 + bx + c = 0$의 근이다.

④ z가 주어진 방정식의 근이면 $-\bar{z}$도 주어진 방정식의 근이다.

⑤ z가 주어진 방정식의 근이면 $-iz$는 $ax^2 + bx + c = 0$의 근이다.

해설

z가 주어진 방정식의 근이라면
a, b, c는 실수이므로 켤레복소수의 성질을 적용하면
$az^2 + ibz + c = 0$, $\overline{az^2 + ibz + c} = 0$
$a\overline{(z^2)} - ib\bar{z} + c = 0$,
$a(-\bar{z})^2 + ib(-\bar{z}) + c = 0$이므로
$-\bar{z}$도 주어진 방정식의 근이다.

10. $x=\frac{1}{2}(-1+\sqrt{3}i)$ 일 때 $x+\cfrac{1}{x+\cfrac{1}{x+\cfrac{1}{x+\frac{1}{x}}}}$ 의 값은?

① 0　② 1　③ 2

④ $\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$　⑤ $\frac{-5+\sqrt{3}i}{4}$

해설

$x=\frac{1}{2}(-1+\sqrt{3}i)$ 에서 $2x+1=\sqrt{3}i$

이 식의 양변을 제곱하여 정리하면

$x^2+x+1=0$ $\therefore$ $x+\frac{1}{x}=-1$

$$\begin{aligned}\therefore \text{(준식)} &= x+\cfrac{1}{x+\cfrac{1}{x-1}} \\ &= x+\frac{x-1}{x^2-x+1} \\ &= x+\frac{x-1}{-2x} \\ &= \frac{-2x^2+x-1}{-2x} \\ &= \frac{-2(-x-1)+x-1}{-2x} \\ &= \frac{3x+1}{-2x} \\ &= -\frac{3}{2}-\frac{1}{2x} \\ &= -\frac{3}{2}+\frac{1}{1-\sqrt{3}i} \\ &= \frac{-5+\sqrt{3}i}{4}\end{aligned}$$