

1. x, y 에 대한 이차방정식 $x^2 + y^2 - 2kx + 2ky + 3k^2 - 4k + 2 = 0$ 이 반지름의 길이가 1 인 원의 방정식일 때, 상수 k 값의 합을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

주어진 방정식을 변형하면

$$(x - k)^2 + (y + k)^2 = -k^2 + 4k - 2 \quad \dots \textcircled{1}$$

반지름의 길이가 1 이므로

$$\textcircled{1} \text{에서 } -k^2 + 4k - 2 = 1 \leftarrow r^2 = 1$$

$$k^2 - 4k + 3 = 0, (k - 1)(k - 3) = 0$$

$$\therefore k = 1 \text{ 또는 } k = 3$$

따라서 합은 4이다.

2. 중심이 y 축 위에 있고, 두 점 $A(-1, 0)$ $B(3, 2)$ 를 지나는 원의 중심과 반지름의 길이 r 을 구하면?

① $(0, 3), r = 10$

② $(0, 3), r = \sqrt{10}$

③ $(0, 2), r = 10$

④ $(0, 2), r = \sqrt{10}$

⑤ $(0, -3), r = 10$

해설

중심이 y 축에 있는 원의 방정식은

$$x^2 + (y - a)^2 = r^2 \quad \dots \text{① 이다.}$$

$(-1, 0)$ 을 $(3, 2)$ 를 ① 에 각각 대입하면,

$$a^2 = r^2 - 1 \quad \dots \text{②}$$

$$(a - 2)^2 = r^2 - 9 \quad \dots \text{③}$$

③ 을 ② 에 대입하면,

$$a^2 = (a - 2)^2 + 8$$

$$\Rightarrow a = 3 \quad r = \sqrt{10}$$

$\therefore$ 중심은 $(0, 3)$, 반지름은 $\sqrt{10}$ 이다.

3. 점 (1, 2)를 지나고 x 축 및 y 축에 동시에 접하는 원은 두 개가 존재할 때, 이 두 원의 중심 사이의 거리는?

① $\sqrt{2}$

② $2\sqrt{2}$

③ $3\sqrt{2}$

④ $4\sqrt{2}$

⑤ $5\sqrt{2}$

해설

구하는 원의 반지름의 길이를 r 라 하면 원의 방정식은

$(x-r)^2 \times (y-r)^2 = r^2$ 이 원이 점 (1, 2)를 지나므로

$$(1-r)^2 + (2-r)^2 = r^2, r^2 - 6r + 5 = 0, (r-1)(r-5) = 0$$

$$\therefore r = 1 \text{ 또는 } r = 5$$

따라서, 두 원의 중심은 각각 (1, 1), (5, 5) 이므로

두 원의 중심 사이의 거리는

$$\sqrt{(5-1)^2 + (5-1)^2} = 4\sqrt{2}$$

4. 두 점 A(1, 0), B(4, 0) 에서의 거리의 비가 2 : 1 이 되도록 움직이는 점 P 의 자취는 원이다. 이 원의 둘레의 길이는?

① 2π

② $2\sqrt{3}\pi$

③ 4π

④ $2\sqrt{5}\pi$

⑤ 8π

해설

점 P 의 자취는 점 A, B 의 내분점, 외분점을 지름의 양끝으로 하는 원과 같다.

$$\Rightarrow \text{내분점은 } \left(\frac{2 \times 4 + 1 \times 1}{2 + 1}, 0 \right) = (3, 0)$$

$$\Rightarrow \text{외분점은 } \left(\frac{2 \times 4 - 1 \times 1}{2 - 1}, 0 \right) = (7, 0)$$

$\therefore$ 중심은 (5, 0) 이고, 반지름은 2 인 원

$$\Rightarrow \text{둘레의 길이는 } 2 \times 2 \times \pi = 4\pi$$

5. 두 점 $A(-\sqrt{2}, 0)$, $B(\sqrt{2}, 0)$ 가 있다. 조건 $2\overline{PA}^2 - \overline{PB}^2 = 9$ 를 만족시키는 점 $P(x, y)$ 의 자취는 원이다. 이 원의 반지름은?

① 2

② 3

③ 4

④ 5

⑤ 6

해설

$$2\overline{PA}^2 - \overline{PB}^2 = 9$$

$$2\{(x + \sqrt{2})^2 + y^2\} - \{(x - \sqrt{2})^2 + y^2\} = 9$$

$$\text{이것을 정리하면, } (x + 3\sqrt{2})^2 + y^2 = 25$$

점 P 의 자취는 점 $(-3\sqrt{2}, 0)$ 을 중심으로 하고,
반지름이 5 인 원이다.