1. 다음 중 명제가 아닌 것은?

① 6과 18의 최대공약수는 3 이다.

② 설악산은 제주도에 있다.

③ $x=2$ 이면 $3x=6$ 이다.

④ $x+1<0$

⑤ 삼각형의 세 내각의 크기의 합은 $180°$이다.

해설

명제는 참과 거짓을 명확하게 판단할 수 있는 문장이나 식을 말한다. ①, ②는 거짓 명제이고, ③, ⑤는 참인 명제이다. 그러나 ④는 x의 값에 따라서 참일 수도 있고 거짓일 수도 있으므로 명제가 아니다.

2. 다음 중 참인 명제는? (단, 문자는 모두 실수이다.)

① $a < b$이면 $a + c > b + c$

② $a < b$이면 $a - c > b - c$

③ $a < b$이고 $c > 0$이면 $ac > bc$

④ $a < b$이고 $c > 0$이면 $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$

⑤ $ac < bc$이면 $a > b$

해설

실수의 대소 관계에는 다음과 같은 성질이 있다.

ⅰ) 임의의 두 실수 a, b 에 대하여 $a > b$, $a = b$, $a < b$ 중에서 어느 하나만이 성립한다.
ⅱ) $a > b$, $b > c$ 이면 $a > c$
ⅲ) $a > b$ 이면 $a \pm c > b \pm c$
ⅳ) $a > b$, $c > 0$ 이면 $ac > bc$
ⅴ) $a > b$, $c < 0$ 이면 $ac < bc$
따라서 참인 것은 ④이다.

3. 전체집합 U 에서 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 할 때, 명제 $\sim p \to q$ 가 참일 때, 다음 중 옳지 않은 것은? (단, $U \neq \varnothing$)

① $P^c \subset Q$ ② $P \cap Q = \varnothing$ ③ $P^c \cap Q^c = \varnothing$
④ $P \cap Q^c = Q^c$ ⑤ $P \cup Q = U$

해설

$\sim p \to q$를 확인하기 위해 대우의 참, 거짓을 판별하거나 포함 관계를 본다.
$P^c \subset Q$ 이려면 $(P \cup Q)^c = \varnothing$ 이어야 한다.
$\therefore P \cup Q = U, P^c \cap Q^c = \varnothing$
$P \cap Q = \varnothing$ 는 알 수 없다.

4. 다음 중 명제 '$x+y \geq 2$ 이고 $xy \geq 1$ 이면, $x \geq 1$ 이고 $y \geq 1$ 이다.' 가 거짓임을 보이는 반례는?

① $x=1,\ y=\frac{1}{2}$ ② $x=100,\ y=\frac{1}{2}$
③ $x=1,\ y=1$ ④ $x=2,\ y=4$
⑤ $x=-1,\ y=-5$

해설

$x+y \geq 2,\ xy \geq 1$ 는 만족하지만, $x \geq 1, y \geq 1$ 은 만족하지 않는 반례를 찾는다.
$\therefore x=100, y=\frac{1}{2}$ 일 때, 거짓이다.

5. 명제 'p 이면 q 가 아니다.' 의 역인 명제의 대우를 구하면?

① q 가 아니면 p 이다.
② q 이면 p 가 아니다.
③ p 가 아니면 q 가 아니다.
④ p 가 아니면 q 이다.
⑤ q 이면 p 이다.

해설

$p \to \sim q \Rightarrow \sim q \to p \Rightarrow \sim p \to q \Rightarrow$ p가 아니면 q 이다.

6. 명제 'x 가 4의 배수이면 x 는 2의 배수이다' 의 대우는?

① x 가 2의 배수이면 x 는 4의 배수이다.
② x 가 2의 배수이면 x 는 4의 배수가 아니다.
③ x 가 4의 배수이면 x 는 2의 배수가 아니다.
④ x 가 4의 배수가 아니면 x 는 2의 배수가 아니다.
⑤ x 가 2의 배수가 아니면 x 는 4의 배수가 아니다.

해설
$p \to q$ 의 대우는 $\sim q \to \sim p$

7. 명제「내일 소풍가지 않으면, 비가 온다.」의 대우는?

① 내일 소풍가면, 비가 오지 않는다.

② 내일 비가 오면, 소풍 가지 않는다.

③ 내일 비가 오지 않으면, 소풍 간다.

④ 내일 소풍 가지 않으면, 비가 오지 않는다.

⑤ 내일 소풍 가면, 비가 온다.

해설

명제 '$p \rightarrow q$'의 대우는 '$\sim q \rightarrow \sim p$' 이다.
p : 소풍가지 않는다. q : 비가 온다.
따라서 $\sim q \rightarrow \sim p$: 내일 비가 오지 않으면, 소풍 간다.(여기에서 '내일'은 가정, 결론에 포함되는 것이 아니라 명제의 대전제가 되는 부분이다.)

8. 조건 p가 조건 q이기 위한 충분조건일 때, 조건 q는 조건 p이기 위한 (가) 조건이고, 조건 $\sim p$는 조건 $\sim q$이기 위한 (나) 조건이다. (가), (나)에 각각 알맞은 것은?

① 필요, 필요　　② 충분, 충분

③ 필요, 충분　　④ 충분, 필요

⑤ 필요충분, 충분

해설

p가 q이기 위한 충분조건 : $p \Rightarrow q$
(가) : $p \Rightarrow q$ 이면 q는 p이기 위한 필요조건
(나) : $p \Rightarrow q$ 이면 그 대우 $\sim q \Rightarrow \sim p$ $\therefore \sim p$는 $\sim q$이기 위한 필요조건

9. $x-1=0$이 $2x^2+ax-1=0$이기 위한 충분조건일 때 상수 a 의 값을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x-1=0$이면 $2x^2+ax-1=0$이 참이므로
$x=1$을 대입하면 $2+a-1=0$
$\therefore a=-1$

10. $a > b > 0$일 때, 다음 $2a+b$, $a+2b$의 대소를 비교하면?

① $2a+b < a+2b$
② $2a+b \le a+2b$
③ $2a+b > a+2b$
④ $2a+b \ge a+2b$
⑤ $2a+b = a+2b$

해설

$(2a+b)-(a+2b) = a-b > 0$

$\therefore 2a+b > a+2b$

11. 세 수 $A = 3\sqrt{3} - 1$, $B = \sqrt{3} + 2$, $C = 2\sqrt{3} + 1$의 대소 관계를 바르게 나타낸 것은?

① $C < B < A$　　② $A < B < C$　　③ $A < C < B$

④ $B < A < C$　　⑤ $B < C < A$

해설

ⅰ) $A - B = (3\sqrt{3} - 1) - (\sqrt{3} + 2)$
$= 2\sqrt{3} - 3 = \sqrt{12} - \sqrt{9} > 0$
$\therefore A > B$

ⅱ) $B - C = (\sqrt{3} + 2) - (2\sqrt{3} + 1)$
$= 1 - \sqrt{3} < 0$
$\therefore B < C$

ⅲ) $C - A = (2\sqrt{3} + 1) - (3\sqrt{3} - 1)$
$= 2 - \sqrt{3} = \sqrt{4} - \sqrt{3} > 0$
$\therefore C > A$

따라서 $B < A < C$

12. $x>0,\ y>0$ 일 때 두 식 $\sqrt{x}+\sqrt{y},\ \sqrt{2(x+y)}$ 를 바르게 비교한 것은?

① $\sqrt{x}+\sqrt{y}<\sqrt{2(x+y)}$
② $\sqrt{x}+\sqrt{y}\le\sqrt{2(x+y)}$
③ $\sqrt{x}+\sqrt{y}>\sqrt{2(x+y)}$
④ $\sqrt{x}+\sqrt{y}\ge\sqrt{2(x+y)}$
⑤ $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{2(x+y)}$

해설

$\sqrt{x}+\sqrt{y}>0,\ \sqrt{2(x+y)}>0$

이 때 $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2-\left\{\sqrt{2(x+y)}\right\}^2$
$=(x+y+2\sqrt{xy})-(2x-2y)$
$=-(x-2\sqrt{xy}+y)$
$=-(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2\le 0$

이므로 $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2\le\left\{\sqrt{2(x+y)}\right\}^2$
$\therefore (\sqrt{x}+\sqrt{y})\le\sqrt{2(x+y)}$
(단, 등호는 $\sqrt{x}=\sqrt{y}$, 즉 $x=y$일때성립)

13. $a>0,\ b>0$일 때, 다음 식 $\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{9}{a}\right)$의 최솟값을 구하면?

① 16　② 17　③ 18　④ 19　⑤ 20

해설

$$\begin{aligned}\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{9}{a}\right) &= ab+9+1+\frac{9}{ab}\\ &= 10+ab+\frac{9}{ab}\\ &\geq 10+2\sqrt{ab\times\frac{9}{ab}}\\ &= 10+6=16\end{aligned}$$

따라서 최솟값은 16

14. 양의 실수 a, b, c 사이에 대하여 $\frac{a+b+c}{a}+\frac{a+b+c}{b}+\frac{a+b+c}{c}$ 의 최솟값을 구하여라.

① 9 ② 11 ③ 13 ④ 15 ⑤ 17

해설

$\frac{a+b+c}{a}+\frac{a+b+c}{b}+\frac{a+b+c}{c}$

$=1+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{a}{b}+1+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+1$

$=3+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{c}$ 에서

$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geq 2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}=2$

$\sqrt{\frac{c}{a}\cdot\frac{a}{c}}=2$, $\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\geq 2\sqrt{\frac{c}{b}\cdot\frac{b}{c}}=2$

따라서 주어진 식의 최솟값은 $3+6=9$

15. x, y가 실수이고 $x^2+y^2=10$일 때 $x+3y$의 최댓값은?

① 5　　② 6　　③ 8　　④ 9　　⑤ 10

해설

x, y가 실수이므로
코시-슈바르츠 부등식에 의하여
$(1^2+3^2)(x^2+y^2) \geq (x+3y)^2$
이 때, $x^2+y^2=10$이므로
$100 \geq (x+3y)^2$
$\therefore -10 \leq x+3y \leq 10$
(단, 등호는 $x=\frac{y}{3}$일 때 성립)
따라서 최댓값은 10이다.