1. 등식 $f(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6 = (x+a)(x+b)(x+c)$ 일 때, $a+b+c$ 의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

조립제법을 사용한다

1	1	4	1	-6
		1	5	6
-2	1	5	6	0
		-2	-6	
-3	1	3	0	
		-3		
	1	0		

$x^3 + 4x^2 + x - 6 = (x-1)(x+2)(x+3)$

$\therefore a+b+c = 4$

2. $\dfrac{a}{1-i}+\dfrac{b}{1+i}=5$를 만족하는 두 실수 $a,\ b$에 대하여 곱 ab의 값을 구하면?

① 5 ② 10 ③ 15 ④ 20 ⑤ 25

해설

$\dfrac{a(1+i)}{2}+\dfrac{b(1-i)}{2}=5$

$a(1+i)+b(1-i)=10,$

$(a+b)+(a-b)i=10$

$a+b=10,\ a-b=0$

$2a=10,\ a=5,\ b=5,\ ab=25$

3. 다음 <보기>에서 계산 중 잘못된 것을 모두 고르면? (단, $i = \sqrt{-1}$
)

보기

Ⅰ. $\sqrt{-3}\sqrt{-3} = \sqrt{(-3)\cdot(-3)} = \sqrt{9} = 3$
Ⅱ. $\sqrt{5}\sqrt{-2} = \sqrt{5\times(-2)} = \sqrt{-10} = \sqrt{10}i$
Ⅲ. $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{-6}} = \sqrt{\dfrac{2}{-6}} = \sqrt{-\dfrac{1}{3}} = \sqrt{\dfrac{1}{3}}i$
Ⅳ. $\dfrac{\sqrt{-10}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\dfrac{-10}{2}} = \sqrt{-5} = \sqrt{5}i$

① Ⅰ, Ⅱ ② Ⅰ, Ⅲ ③ Ⅱ, Ⅲ, Ⅳ
④ Ⅱ, Ⅳ ⑤ Ⅲ, Ⅳ

해설

Ⅰ. $\sqrt{-3}\sqrt{-3} = \sqrt{3}i\sqrt{3}i = \sqrt{9}i^2 = -3$
∴ 옳지 않다.
Ⅱ. $\sqrt{5}\sqrt{-2} = \sqrt{5}\sqrt{2}i = \sqrt{10}i$
∴ 옳다.
Ⅲ. $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{-6}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}i} = \sqrt{\dfrac{2}{6}}\cdot\dfrac{i}{i^2} = -\sqrt{\dfrac{1}{3}}i$
∴ 옳지 않다.
Ⅳ. $\dfrac{\sqrt{-10}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{10}i}{\sqrt{2}} = \sqrt{\dfrac{10}{2}}i = \sqrt{5}i$
∴ 옳다.

4. x에 대한 이차방정식 $(m+3)x^2-4mx+2m-1=0$이 중근을 갖도록 하는 실수 m의 값의 합은?

① $-\frac{5}{2}$　② $-\frac{3}{2}$　③ 0　④ $\frac{3}{2}$　⑤ $\frac{5}{2}$

해설

주어진 이차방정식의 판별식을 D라고 하면 중근을 가질 조건은 $D=0$이므로

$\frac{D}{4}=(-2m)^2-(m+3)(2m-1)=0$

$4m^2-(2m^2+5m-3)=0$

$2m^2-5m+3=0$

$(m-1)(2m-3)=0$

$\therefore m=1$ 또는 $\frac{3}{2}$

$\therefore 1+\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$

5. $x^3 - 1 = 0$ 의 한 허근을 ω 라 할 때, $\omega^3 + \overline{\omega}^3$ 의 값을 구하면? (단, $\overline{\omega}$ 는 ω 의 켤레복소수이다.)

① -1　② 0　③ 1　④ 2　⑤ 3

해설

$x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1) = 0$

$x = 1$ 또는 $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

$\dfrac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ 를 ω 라 하면

$\overline{\omega} = \dfrac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$

$\therefore\ \omega^3 = 1,\ \overline{\omega}^3 = 1,\ \omega^3 + \overline{\omega}^3 = 2$

6. x 에 대한 다항식 x^3+ax^2+bx+2 를 x^2-x+1 로 나눈 나머지가 $x+3$ 이 되도록 a, b 의 값을 정할 때, ab 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $ab=-6$

해설

검산식을 사용

$x^3+ax^2+bx+2=(x^2-x+1)\cdot A+(x+3)$

$A=(x+p)$

$x^3+ax^2+bx+2-(x+3)=(x^2-x+1)(x+p)$

$x^3+ax^2+(b-1)x-1=(x^2-x+1)(x-1)\ \ \therefore p=-1$

우변을 정리하면

$\therefore\ a=-2,\ b=3$

$\therefore ab=-6$

7. $(x^3 + 2x^2 - 3x + 2)^4(2x - 1)^7$ 을 전개했을 때, 모든 계수들의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$(x^3 + 2x^2 - 3x + 2)^4 \cdot (2x - 1)^7$
$= a_0x^{19} + a_1x^{18} + a_2x^{17} + \cdots + a_{19}$ 로 놓으면
계수들의 총합 $a_0 + a_1 + \cdots + a_{19}$ 는 양변에 $x = 1$ 을 대입한 결과와 같으므로 항등식의 성질에서
$(1 + 2 - 3 + 2)^4 \cdot (2 - 1)^7 = 2^4 = 16$

8. $a^2-b^2-c^2+2bc$ 의 인수가 아닌 것은?

① $a-b+c$ ② $a+b-c$ ③ $-a+b-c$

④ $-a+b+c$ ⑤ $-a-b+c$

해설

$$a^2-b^2-c^2+2bc=a^2-(b^2+c^2-2bc)$$
$$=a^2-(b-c)^2$$
$$=(a+b-c)(a-b+c)$$

인수 : $(a+b-c)$, $(a-b+c)$(단, 복부호 동순)

9. 다음을 계산하여라.

$$1 + i + i^2 + \cdots + i^{2006}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : i

해설

$1 + i + i^2 + \cdots + i^{2006}$
$= 1 + (i + i^2 + i^3 + i^4) + (i^5 + i^6 + i^7 + i^8) + \cdots$
$\quad \cdots + (i^{2001} + i^{2002} + i^{2003} + i^{2004}) + (i^{2005} + i^{2006})$
$= 1 + (i - 1 - i + 1) + (i - 1 - i + 1)$
$\quad + \cdots + (i - 1 - i + 1) + (i - 1)$
$= i$

10. 이차방정식 $x^2+ax+2b=0$의 한 근이 $2+ai$일 때 실수 $a,\ b$의 합 $a+b$의 값은? (단 $a \neq 0$)

① -9　② -5　③ 3　④ 6　⑤ 12

해설

한 근이 $2+ai$이므로 다른 한 근은 $2-ai$이다.
$\therefore$두 근의 합 $-a=4$　$\therefore a=-4$
두 근의 곱 $(2-4i)(2+4i)=4+16=2b$
$\therefore b=10$　$\therefore a+b=10-4=6$

11. 다음 [보기] 중 최솟값이 같은 것을 모두 고르면?

보기

㉠ $y=-(x+1)^2-3$	㉡ $y=2(x-1)^2-3$
㉢ $y=-3x^2-6x-6$	㉣ $y=x^2-3$
㉤ $y=\frac{1}{3}(x-1)^2+3$	㉥ $y=-x^2+3$

① ㉠,㉡, ㉢, ㉣　② ㉠,㉢　③ ㉡, ㉣
④ ㉤,㉥　⑤ ㉠, ㉥

해설

$y=a(x-p)^2+q$ 에서 a 의 부호가 양이고, q 의 값이 같은 것을 찾는다.

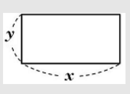
12. 가로의 길이가 세로의 길이보다 5 cm 더 긴 직사각형이 있다. 둘레의 길이가 34 cm 일 때, 이 직사각형의 가로의 길이와 세로의 길이의 곱을 구하여라.(단, 단위 생략)

▶ 답 :

▷ 정답 : 66

해설

직사각형의 가로, 세로의 길이를
각각 $x$cm, $y$cm 라 하면



$x = y + 5 \quad \cdots\cdots$ ㉠
또, 이 직사각형의 둘레는 $2(x + y)$ 이므로
$2(x + y) = 34$ 즉, $x + y = 17 \quad \cdots\cdots$ ㉡
㉠을 ㉡에 대입하면
$y + 5 + y = 17,\ 2y = 12$
$\therefore\ y = 6$
$y = 6$ 을 ㉠에 대입하면 $x = 11$
$\therefore\ xy = 11 \times 6 = 66$

13. 연립방정식 $\begin{cases} 2x^2-3xy+y^2=0 \\ 5x^2-y^2=4 \end{cases}$ 의 근을 $x=\alpha$, $y=\beta$라 할 때, $\alpha+\beta$의 최댓값은?

① 4　② 6　③ 7　④ 8　⑤ 10

해설

$\begin{cases} 2x^2-3xy+y^2=0 & \cdots ① \\ 5x^2-y^2=4 & \cdots ② \end{cases}$

①식을 인수분해하면

$(2x-y)(x-y)=0 \quad \therefore\ y=2x,\ y=x$

②식에 대입하면

$y=2x$일 때 $5x^2-(2x)^2=4,\ x^2=4,\ x=\pm2,\ y=\pm4$

$y=x$일 때 $5x^2-x^2=4,\ \ 4x^2=4\ x^2=1,\ \ x=\pm1,\ y=\pm1$

$\therefore \alpha+\beta=6,\ -6,\ 2,\ -2$

$\therefore \alpha+\beta$ 의 최댓값은 6

14. $x+y+z=4,\ xy+yz+zx=1,\ xyz=2$ 일 때, $(xy+yz)(yz+zx)(zx+xy)$ 의 값을 구하면?

① 16　② 8　③ 4　④ 2　⑤ 1

해설

$(xy+yz)(yz+zx)(zx+xy)$ 을
$xy+yz+zx=1$ 을 이용하여 변형하면
$(xy+yz)(yz+zx)(zx+xy)$
$=(1-zx)(1-xy)(1-yz)$
$=1-(xy+yz+zx)+(x^2yz+xy^2z+xyz^2)-(xyz)^2$
$=1-(xy+yz+zx)+xyz(x+y+z)-(xyz)^2$
$=1-1+2\cdot 4-4$
$=4$
※ 위에서 아래의 전개식을 이용하였다.
$(x-a)(x-b)(x-c)$
$=x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc$

15. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 는 $x = 2$ 에서 최솟값 4 를 가지고, 점 $(3,\ 6)$ 을 지난다. 이 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

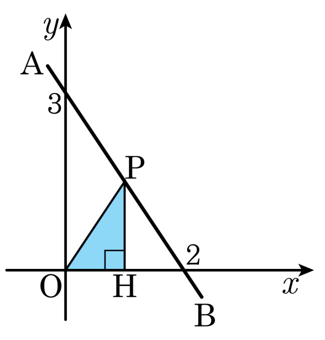
$y = ax^2 + bx + c$

$\quad = a(x-2)^2 + 4$

점 $(3,\ 6)$ 을 지나므로 $a(3-2)^2 + 4 = 6$

$\therefore a = 2$

16. 선분 AB 위의 한 점 P 에서 x 축에 내린 수선의 발을 H 라고 할 때, △POH 의 넓이의 최댓값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 0.75

해설

$\overline{AB}$ 를 지나는 직선은 두 점 $(0,\ 3)$, $(2,\ 0)$ 을 지나므로

$y=-\frac{3}{2}x+3$

H 점의 좌표를 $(a,\ 0)$ 이라고 하면, 점 P 의 좌표는 $\left(a, -\frac{3}{2}a+3\right)$

$$\begin{aligned}\triangle POH &= \frac{1}{2}\times a\times\left(-\frac{3}{2}a+3\right)\\ &= -\frac{3}{4}a^2+\frac{3}{2}a\\ &= -\frac{3}{4}(a^2-2a+1-1)\\ &= -\frac{3}{4}(a-1)^2+\frac{3}{4}\end{aligned}$$

따라서 최댓값은 $\frac{3}{4}$ 이다.

17. 방정식 $2x^4 - 5x^3 + x^2 - 5x + 2 = 0$의 모든 실근의 합을 a, 모든 허근의 곱을 b라 할 때, $a + b$의 값은?

① 5 ② 3 ③ $\frac{3}{2}$ ④ -2 ⑤ 4

해설

$2x^4 - 5x^3 + x^2 - 5x + 2 = 0$ 양변을

x^2 으로 나누고 정리하면

$2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 1 = 0$

$2\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) - 3 = 0$

$2t^2 - 5t - 3 = (2t + 1)(t - 3) = 0$

$\left(2x + \frac{2}{x} + 1\right)\left(x + \frac{1}{x} - 3\right) = 0$

$\therefore (2x^2 + x + 2)(x^2 - 3x + 1) = 0$

이 때, $2x^2 + x + 2 = 0$은 허근을 갖고,

$x^2 - 3x + 1 = 0$은 실근을 가지므로

실근의 합 $a = 3$, 허근의 곱 $b = 1$이다.

$\therefore a + b = 4$

18. 4차의 다항식 $f(x)$가 $f(0) = 0$, $f(1) = \frac{1}{2}$, $f(2) = \frac{2}{3}$, $f(3) = \frac{3}{4}$, $f(4) = \frac{4}{5}$를 만족시킬 때, $f(5)$의 값을 구하면?

① 0　　② 1　　③ $\frac{5}{6}$　　④ $\frac{2}{3}$　　⑤ $\frac{1}{2}$

해설

주어진 조건에 따라
$f(n) = \frac{n}{n+1}(n = 0, 1, 2, 3, 4)$
$(n+1)f(n) - n = 0$
$g(x) = (x+1)f(x) - x$로 놓으면
$g(0) = g(1) = g(2) = g(3) = g(4) = 0$
그런데 $g(x)$는 다항식이므로 나머지정리에 의해
$x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$를 인수로 갖는다.
또, $f(x)$가 4차식이므로 $g(x)$는 5차식이다.
$\therefore\ g(x) = ax(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(a \neq 0) \cdots$ ㉠
그런데, $g(-1) = 1$이므로 ㉠에서
$g(-1) = -(5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1)a = 1$
$\therefore\ a = -\frac{1}{(5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1)}$
$g(x) = (x+1)f(x) - x$
$= -\frac{1}{(5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1)}x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$
$g(5) = 6f(5) - 5 = -\frac{(5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1)}{(5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1)} = -1$
$\therefore\ f(5) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

19. 함수 $f(x)=\dfrac{-4}{\sqrt{px^2+2x-p+3}}$ 가 최솟값을 가질 때, 정수 p 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

분모가 항상 음수이므로 주어진 함수가 최소가 될 때는 함수 $y=px^2+2x-p+3\cdots㉠$ 이 최댓값을 가질 때이다.
만약 함수 y 가 음수나 0 을 최솟값으로 갖게 되면 함숫값이 존재하지 않으므로 함수 y 의 최솟값은 양수이다.
따라서 $p>0\cdots㉡$
$D=p^2-3p+1<0\cdots㉢$ 의 두 식이 모두 만족되면, ㉠이 양의 최솟값을 갖는다.
$p^2-3p+1<0$ 에서 $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}<p<\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$
따라서 정수 p 의 최댓값은 2 이다.