

1. 등식 $f(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6 = (x+a)(x+b)(x+c)$ 일 때, $a+b+c$ 의 값은?

① 2

② 3

③ 4

④ 5

⑤ 6

해설

조립제법을 사용한다

1	1	4	1	-6
		1	5	6
-2	1	5	6	0
		-2	-6	
-3	1	3	0	
		-3		
	1	0		

$$x^3 + 4x^2 + x - 6 = (x-1)(x+2)(x+3)$$

$$\therefore a+b+c = 4$$

2. $\frac{a}{1-i} + \frac{b}{1+i} = 5$ 를 만족하는 두 실수 a, b 에 대하여 곱 ab 의 값을 구하면?

① 5

② 10

③ 15

④ 20

⑤ 25

해설

$$\frac{a(1+i)}{2} + \frac{b(1-i)}{2} = 5$$

$$a(1+i) + b(1-i) = 10,$$

$$(a+b) + (a-b)i = 10$$

$$a+b = 10, a-b = 0$$

$$2a = 10, a = 5, b = 5, ab = 25$$

3. 다음 <보기>에서 계산 중 잘못된 것을 모두 고르면? (단, $i = \sqrt{-1}$)

보기

$$\text{I. } \sqrt{-3}\sqrt{-3} = \sqrt{(-3) \cdot (-3)} = \sqrt{9} = 3$$

$$\text{II. } \sqrt{5}\sqrt{-2} = \sqrt{5 \times (-2)} = \sqrt{-10} = \sqrt{10}i$$

$$\text{III. } \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{-6}} = \sqrt{\frac{2}{-6}} = \sqrt{-\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{1}{3}}i$$

$$\text{IV. } \frac{\sqrt{-10}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{-10}{2}} = \sqrt{-5} = \sqrt{5}i$$

① I, II

② I, III

③ II, III, IV

④ II, IV

⑤ III, IV

해설

$$\text{I. } \sqrt{-3}\sqrt{-3} = \sqrt{3}i\sqrt{3}i = \sqrt{9}i^2 = -3$$

∴ 옳지 않다.

$$\text{II. } \sqrt{5}\sqrt{-2} = \sqrt{5}\sqrt{2}i = \sqrt{10}i$$

∴ 옳다.

$$\text{III. } \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{-6}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}i} = \sqrt{\frac{2}{6}} \cdot \frac{i}{i^2} = -\sqrt{\frac{1}{3}}i$$

∴ 옳지 않다.

$$\text{IV. } \frac{\sqrt{-10}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}i}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{10}{2}}i = \sqrt{5}i$$

∴ 옳다.

4. x 에 대한 이차방정식 $(m+3)x^2 - 4mx + 2m - 1 = 0$ 이 중근을 갖도록 하는 실수 m 의 값의 합은?

① $-\frac{5}{2}$

② $-\frac{3}{2}$

③ 0

④ $\frac{3}{2}$

⑤ $\frac{5}{2}$

해설

주어진 이차방정식의 판별식을 D 라고 하면 중근을 가질 조건은 $D = 0$ 이므로

$$\frac{D}{4} = (-2m)^2 - (m+3)(2m-1) = 0$$

$$4m^2 - (2m^2 + 5m - 3) = 0$$

$$2m^2 - 5m + 3 = 0$$

$$(m-1)(2m-3) = 0$$

$$\therefore m = 1 \text{ 또는 } \frac{3}{2}$$

$$\therefore 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$$

5. $x^3 - 1 = 0$ 의 한 허근을 ω 라 할 때, $\omega^3 + \bar{\omega}^3$ 의 값을 구하면? (단, $\bar{\omega}$ 는 ω 의 켤레복소수이다.)

① -1

② 0

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

$$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$$

$$x = 1 \text{ 또는 } x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

$$\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \text{를 } \omega \text{라 하면}$$

$$\bar{\omega} = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$$

$$\therefore \omega^3 = 1, \bar{\omega}^3 = 1, \omega^3 + \bar{\omega}^3 = 2$$

6. x 에 대한 다항식 $x^3 + ax^2 + bx + 2$ 를 $x^2 - x + 1$ 로 나눈 나머지가 $x + 3$ 이 되도록 a, b 의 값을 정할 때, ab 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $ab = -6$

해설

검산식을 사용

$$x^3 + ax^2 + bx + 2 = (x^2 - x + 1) \cdot A + (x + 3)$$

$$A = (x + p)$$

$$x^3 + ax^2 + bx + 2 - (x + 3) = (x^2 - x + 1)(x + p)$$

$$x^3 + ax^2 + (b - 1)x - 1 = (x^2 - x + 1)(x - 1) \therefore p = -1$$

우변을 정리하면

$$\therefore a = -2, b = 3$$

$$\therefore ab = -6$$

7. $(x^3 + 2x^2 - 3x + 2)^4(2x - 1)^7$ 을 전개했을 때, 모든 계수들의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$$(x^3 + 2x^2 - 3x + 2)^4 \cdot (2x - 1)^7$$

$$= a_0x^{19} + a_1x^{18} + a_2x^{17} + \cdots + a_{19} \text{로 놓으면}$$

계수들의 총합 $a_0 + a_1 + \cdots + a_{19}$ 는 양변에 $x = 1$ 을 대입한 결과와 같으므로 항등식의 성질에서

$$(1 + 2 - 3 + 2)^4 \cdot (2 - 1)^7 = 2^4 = 16$$

8. $a^2 - b^2 - c^2 + 2bc$ 의 인수가 아닌 것은?

① $a - b + c$

② $a + b - c$

③ $-a + b - c$

④ $-a + b + c$

⑤ $-a - b + c$

해설

$$a^2 - b^2 - c^2 + 2bc = a^2 - (b^2 + c^2 - 2bc)$$

$$= a^2 - (b - c)^2$$

$$= (a + b - c)(a - b + c)$$

인수 : $(a + b - c)$, $(a - b + c)$ (단, 복부호 동순)

9. 다음을 계산하여라.

$$1 + i + i^2 + \cdots + i^{2006}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : i

해설

$$\begin{aligned} & 1 + i + i^2 + \cdots + i^{2006} \\ &= 1 + (i + i^2 + i^3 + i^4) + (i^5 + i^6 + i^7 + i^8) + \cdots \\ &\quad \cdots + (i^{2001} + i^{2002} + i^{2003} + i^{2004}) + (i^{2005} + i^{2006}) \\ &= 1 + (i - 1 - i + 1) + (i - 1 - i + 1) \\ &\quad + \cdots + (i - 1 - i + 1) + (i - 1) \\ &= i \end{aligned}$$

10. 이차방정식 $x^2 + ax + 2b = 0$ 의 한 근이 $2 + ai$ 일 때 실수 a, b 의 합 $a + b$ 의 값은? (단 $a \neq 0$)

① -9

② -5

③ 3

④ 6

⑤ 12

해설

한 근이 $2 + ai$ 이므로 다른 한 근은 $2 - ai$ 이다.

$\therefore$ 두 근의 합 $-a = 4 \quad \therefore a = -4$

두 근의 곱 $(2 - 4i)(2 + 4i) = 4 + 16 = 2b$

$\therefore b = 10 \quad \therefore a + b = 10 - 4 = 6$

11. 다음 [보기] 중 최솟값이 같은 것을 모두 고르면?

보기

㉠ $y = -(x+1)^2 - 3$

㉡ $y = 2(x-1)^2 - 3$

㉢ $y = -3x^2 - 6x - 6$

㉣ $y = x^2 - 3$

㉤ $y = \frac{1}{3}(x-1)^2 + 3$

㉥ $y = -x^2 + 3$

① ㉠, ㉡, ㉢, ㉣

② ㉠, ㉢

③ ㉡, ㉣

④ ㉤, ㉥

⑤ ㉠, ㉥

해설

$y = a(x-p)^2 + q$ 에서 a 의 부호가 양이고, q 의 값이 같은 것을 찾는다.

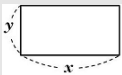
12. 가로,의 길이가 세로의 길이보다 5 cm 더 긴 직사각형이 있다. 둘레의 길이가 34 cm 일 때, 이 직사각형의 가로,의 길이와 세로의 길이의 곱을 구하여라.(단, 단위 생략)

▶ 답 :

▷ 정답 : 66

해설

직사각형의 가로, 세로의 길이를 각각 x cm, y cm 라 하면



$$x = y + 5 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

또, 이 직사각형의 둘레는 $2(x + y)$ 이므로

$$2(x + y) = 34 \text{ 즉, } x + y = 17 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$y + 5 + y = 17, 2y = 12$$

$$\therefore y = 6$$

$$y = 6 \text{ 을 } \textcircled{㉠} \text{ 에 대입하면 } x = 11$$

$$\therefore xy = 11 \times 6 = 66$$

13. 연립방정식 $\begin{cases} 2x^2 - 3xy + y^2 = 0 \\ 5x^2 - y^2 = 4 \end{cases}$ 의 근을 $x = \alpha, y = \beta$ 라 할 때,

$\alpha + \beta$ 의 최댓값은?

① 4

② 6

③ 7

④ 8

⑤ 10

해설

$$\begin{cases} 2x^2 - 3xy + y^2 = 0 & \dots \textcircled{1} \\ 5x^2 - y^2 = 4 & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

①식을 인수분해하면

$$(2x - y)(x - y) = 0 \quad \therefore y = 2x, y = x$$

②식에 대입하면

$$y = 2x \text{ 일 때 } 5x^2 - (2x)^2 = 4, x^2 = 4, x = \pm 2, y = \pm 4$$

$$y = x \text{ 일 때 } 5x^2 - x^2 = 4, 4x^2 = 4, x^2 = 1, x = \pm 1, y = \pm 1$$

$$\therefore \alpha + \beta = 6, -6, 2, -2$$

$$\therefore \alpha + \beta \text{의 최댓값은 } 6$$

14. $x+y+z = 4$, $xy+yz+zx = 1$, $xyz = 2$ 일 때, $(xy+yz)(yz+zx)(zx+xy)$ 의 값을 구하면?

① 16

② 8

③ 4

④ 2

⑤ 1

해설

$(xy + yz)(yz + zx)(zx + xy)$ 을

$xy + yz + zx = 1$ 을 이용하여 변형하면

$$(xy + yz)(yz + zx)(zx + xy)$$

$$= (1 - zx)(1 - xy)(1 - yz)$$

$$= 1 - (xy + yz + zx) + (x^2yz + xy^2z + xyz^2) - (xyz)^2$$

$$= 1 - (xy + yz + zx) + xyz(x + y + z) - (xyz)^2$$

$$= 1 - 1 + 2 \cdot 4 - 4$$

$$= 4$$

※ 위에서 아래의 전개식을 이용하였다.

$$(x - a)(x - b)(x - c)$$

$$= x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + bc + ca)x - abc$$

15. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 는 $x = 2$ 에서 최솟값 4 를 가지고, 점 $(3, 6)$ 을 지난다. 이 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

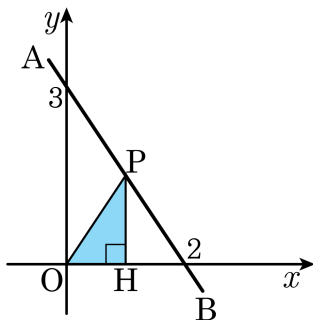
$$y = ax^2 + bx + c$$

$$= a(x - 2)^2 + 4$$

$$\text{점 } (3, 6) \text{ 을 지나므로 } a(3 - 2)^2 + 4 = 6$$

$$\therefore a = 2$$

16. 선분 AB 위의 한 점 P 에서 x 축에 내린 수선의 발을 H 라고 할 때, $\triangle POH$ 의 넓이의 최댓값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 0.75

해설

$\overline{AB}$ 를 지나는 직선은 두 점 $(0, 3)$, $(2, 0)$ 을 지나므로

$$y = -\frac{3}{2}x + 3$$

H 점의 좌표를 $(a, 0)$ 이라고 하면, 점 P 의 좌표는 $\left(a, -\frac{3}{2}a + 3\right)$

$$\begin{aligned}\triangle POH &= \frac{1}{2} \times a \times \left(-\frac{3}{2}a + 3\right) \\ &= -\frac{3}{4}a^2 + \frac{3}{2}a \\ &= -\frac{3}{4}(a^2 - 2a + 1 - 1) \\ &= -\frac{3}{4}(a - 1)^2 + \frac{3}{4}\end{aligned}$$

따라서 최댓값은 $\frac{3}{4}$ 이다.

17. 방정식 $2x^4 - 5x^3 + x^2 - 5x + 2 = 0$ 의 모든 실근의 합을 a , 모든 허근의 곱을 b 라 할 때, $a + b$ 의 값은?

① 5

② 3

③ $\frac{3}{2}$

④ -2

⑤ 4

해설

$2x^4 - 5x^3 + x^2 - 5x + 2 = 0$ 양변을
 x^2 으로 나누고 정리하면

$$2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 1 = 0$$

$$2\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) - 3 = 0$$

$$2t^2 - 5t - 3 = (2t + 1)(t - 3) = 0$$

$$\left(2x + \frac{2}{x} + 1\right)\left(x + \frac{1}{x} - 3\right) = 0$$

$$\therefore (2x^2 + x + 2)(x^2 - 3x + 1) = 0$$

이 때, $2x^2 + x + 2 = 0$ 은 허근을 갖고,

$x^2 - 3x + 1 = 0$ 은 실근을 가지므로

실근의 합 $a = 3$, 허근의 곱 $b = 1$ 이다.

$$\therefore a + b = 4$$

18. 4차의 다항식 $f(x)$ 가 $f(0) = 0, f(1) = \frac{1}{2}, f(2) = \frac{2}{3}, f(3) = \frac{3}{4}, f(4) = \frac{4}{5}$ 를 만족시킬 때, $f(5)$ 의 값을 구하면?

- ① 0 ② 1 ③ $\frac{5}{6}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

해설

주어진 조건에 따라

$$f(n) = \frac{n}{n+1} (n=0, 1, 2, 3, 4)$$

$$(n+1)f(n) - n = 0$$

$$g(x) = (x+1)f(x) - x \text{로 놓으면}$$

$$g(0) = g(1) = g(2) = g(3) = g(4) = 0$$

그런데 $g(x)$ 는 다항식이므로 나머지정리에 의해

$x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ 를 인수로 갖는다.

또, $f(x)$ 가 4차식이므로 $g(x)$ 는 5차식이다.

$$\therefore g(x) = ax(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) (a \neq 0) \cdots \textcircled{A}$$

그런데, $g(-1) = 1$ 이므로 $\textcircled{A}$ 에서

$$g(-1) = -(5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1)a = 1$$

$$\therefore a = -\frac{1}{(5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1)}$$

$$g(x) = (x+1)f(x) - x$$

$$= -\frac{1}{(5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1)} x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$

$$g(5) = 6f(5) - 5 = -\frac{(5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1)}{(5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1)} = -1$$

$$\therefore f(5) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

19. 함수 $f(x) = \frac{-4}{\sqrt{px^2 + 2x - p + 3}}$ 가 최솟값을 가질 때, 정수 p 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 정답 : 2

해설

분모가 항상 음수이므로 주어진 함수가 최소가 될 때는 함수 $y = px^2 + 2x - p + 3 \cdots \textcircled{㉠}$ 이 최댓값을 가질 때이다.

만약 함수 y 가 음수나 0 을 최솟값으로 갖게 되면 함수값이 존재하지 않으므로 함수 y 의 최솟값은 양수이다.

따라서 $p > 0 \cdots \textcircled{㉡}$

$D = p^2 - 3p + 1 < 0 \cdots \textcircled{㉢}$ 의 두 식이 모두 만족되면, $\textcircled{㉠}$ 이 양의 최솟값을 갖는다.

$$p^2 - 3p + 1 < 0 \text{ 에서 } \frac{3 - \sqrt{5}}{2} < p < \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

따라서 정수 p 의 최댓값은 2 이다.