1. 이차방정식 $2x^2 - 2x + 3 = 0$의 두 근을 구하면?

① $-1 \pm \sqrt{5}i$ ② $1 \pm \sqrt{5}$ ③ $\frac{-1 \pm \sqrt{5}i}{2}$
④ $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ ⑤ $\frac{1 \pm \sqrt{5}i}{2}$

해설

$2x^2 - 2x + 3 = 0$에서

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 2\times3}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}i}{2}$$

2. $x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 = 0$을 풀면?

① $x = -\sqrt{2}$　② $x = \sqrt{2}$　③ $x = 0$

④ $x = 4 - \sqrt{2}i$　⑤ $x = 6$

해설

$x^2 - 2\sqrt{2}x + (\sqrt{2})^2 = (x - \sqrt{2})^2 = 0$

$\therefore\ x = \sqrt{2}$

3. 다음 이차방정식의 해를 바르게 짝지은 것은?

(1) $x(5x-4)=4(x-1)$
(2) $x^2-3\sqrt{2}x+6=0$

① (1) $\dfrac{4\pm 2i}{5}$, (2) $\dfrac{3\sqrt{2}\pm\sqrt{6}i}{2}$
② (1) $\dfrac{3\pm 2i}{5}$, (2) $\dfrac{3\sqrt{2}\pm\sqrt{6}i}{2}$
③ (1) $\dfrac{4\pm 2i}{5}$, (2) $\dfrac{3\sqrt{3}\pm\sqrt{6}i}{2}$
④ (1) $\dfrac{1\pm 2i}{5}$, (2) $\dfrac{2\sqrt{2}\pm\sqrt{6}i}{2}$
⑤ (1) $\dfrac{4\pm 3i}{5}$, (2) $\dfrac{3\sqrt{2}\pm\sqrt{6}i}{2}$

해설

근의 공식을 이용하여 푼다.
(1) $x(5x-4)=4(x-1)$
$\therefore\ 5x^2-8x+4=0$
$\therefore\ x=\dfrac{4\pm\sqrt{16-20}}{5}=\dfrac{4\pm 2i}{5}$
(2) $x=\dfrac{3\sqrt{2}\pm\sqrt{18-24}}{2}=\dfrac{3\sqrt{2}\pm\sqrt{6}i}{2}$

4. x에 대한 이차방정식 $kx^2+(2k+1)x+6=0$의 해가 $2,\ \alpha$일 때, $k+\alpha$의 값을 구하면?

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

해설

해가 $2, \alpha$라면 방정식에 2를 대입하면 0이 된다.

$k \cdot 2^2 + (2k+1)2 + 6 = 0$

$4k + 4k + 8 = 0$에서 $k = -1$

$k = -1$을 방정식에 대입하고 α를 구한다.

$-x^2 - x + 6 = 0,\ x^2 + x - 6 = 0$

$(x+3)(x-2) = 0,\ x = 2, -3$

$\therefore k = -1,\ \alpha = -3$

$\therefore\ k + \alpha = -4$

5. 이차방정식 $x^2-px+2p+1=0$이 중근을 갖도록 하는 실수 p의 값을 모두 곱하면?

① -8 ② -4 ③ 1 ④ 4 ⑤ 8

해설

$D=p^2-4(2p+1)$

$=p^2-8p-4=0$

판별식으로부터 나온 p에 대한 방정식의 근들이 주어진 식이 중근을 갖게 하므로

실수 p 값들의 곱은 근과 계수의 관계에서 -4이다.

6. 이차방정식 $ax^2 + 4x - 2 = 0$이 서로 다른 두 실근을 가질 때, 실수 a 값의 범위는?

① $a > -2$

② $-2 < a < 0,\ a > 0$

③ $-2 < a < 0$

④ $a > 2$

⑤ $a < 0,\ 0 < a < 2$

해설

$ax^2 + 4x - 2 = 0$에서

(i) 이차방정식이므로 x^2의 계수는 $a \neq 0$이어야 한다.

(ii) 서로 다른 두 실근을 갖기 위해서는 판별식 $\frac{D}{4} > 0$이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = 2^2 - (-2a) > 0,\ 2a + 4 > 0$$

$\therefore a > -2$

따라서 실수 a값의 범위는

$-2 < a < 0$ 또는 $a > 0$

7. 이차방정식 $x^2 - x(kx-7) + 3 = 0$이 허근을 갖기 위한 최대 정수 k 값은?

① -8　② -4　③ -2　④ 5　⑤ 2

해설

$x^2 - x(kx-7) + 3 = 0$

$x^2 - kx^2 + 7x + 3 = 0$

$(1-k)x^2 + 7x + 3 = 0$

(i) 주어진 방정식이 이차방정식이므로

x^2 의 계수는 $1 - k \neq 0$ 이어야 한다.

따라서 $k \neq 1$

(ii) 주어진 이차방정식이

허근을 갖기 위해서는

판별식 $D < 0$이어야 하므로

$D = 7^2 - 4 \cdot (1-k) \cdot 3 = 49 - 12 + 12k < 0$

$37 + 12k < 0$

$\therefore k < -\frac{37}{12}$

따라서 최대정수는 -4이다.

8. x 에 대한 방정식 $(a-2)(x-a)=0$의 풀이 과정에서 다음 중 옳은 것은?

① $a=0$일 때, $x=2$
② $a\neq 2$ 일 때, $x=a$
③ $a=2$일 때, 불능
④ $a=0$ 일 때, 부정
⑤ 해는 없다.

해설

$(a-2)(x-a)=0$
$\Rightarrow$ $a=2$ 또는 $x=a$
ⅰ) $a=2$ 일 때 : 부정
ⅱ) $a\neq 2$ 일 때 : $x=a$

9. 이차방정식 $x^2 - 2ix - k = 0$ 의 근에 대한<보기>의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

㉠ $k > 1$ 이면 두 근은 실근이다.

㉡ $k = 1$ 이면 중근을 갖는다.

㉢ 두 근의 곱은 실수이다.

㉣ $0 < k < 1$이면 두 근은 순허수이다.

① ㉠, ㉡　　② ㉡, ㉣　　③ ㉠, ㉡, ㉢

④ ㉡, ㉢, ㉣　　⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣

해설

근의 공식을 이용하여 $x^2 - 2ix - k = 0$ 의 근을 구하면 $x = i \pm \sqrt{-1+k}$

㉠ $k > 1$ 이어도 x 는 허수이다.<거짓>

㉡ $k = 1$ 이면 $x = i$ 로 중근을 갖는다.<참>

㉢ 두 근의 곱 $-k$ 는 허수일 수도 있다.<거짓>

㉣ $0 < k < 1$이면 $-1 < -1 + k < 0$이므로 $\sqrt{-1+k} = ai(a \neq 1)$ 의 형태가 되어 x 는 순허수이다.

10. 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 의 근의 공식을 유도하는 과정이다. (가), (나), (다) 에 알맞은 식을 차례대로 쓰면?

$$ax^2+bx+c=0 \leftrightarrow x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$
$$\leftrightarrow x^2+\frac{b}{a}x+(\quad)=-\frac{c}{a}+(\text{ 가 })$$
$$\leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{(\text{ 나 })}{4a^2}$$
$$\leftrightarrow x+\frac{b}{2a}=\frac{(\text{ 다 })}{2a}$$

① $\frac{b^2}{4a^2}$, b^2-4ac, $\pm\sqrt{b^2-4ac}$

② $\frac{b}{2a}$, $\sqrt{b^2-4ac}$, b^2-4ac

③ $\frac{b}{2a}$, b^2-4ac, $\pm\sqrt{b^2-4ac}$

④ $\frac{b^2}{4a^2}$, $\sqrt{b^2-4ac}$, b^2-4ac

⑤ $\frac{b}{a}$, $\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac$, $\pm\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac}$

해설

(가) 좌변을 제곱 꼴로 만들려 하는 것이므로 $(x+\frac{b}{2a})^2=x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}$

(나) $-\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2}=-\frac{4ac}{4a^2}+\frac{b^2}{4a^2}=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$

(다) $\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

11. 실수 a, b에 대하여 연산$*$를 $a * b = a^2 + b$ 로 정의한다. 방정식 $x * (x-6) = 0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha + 2\beta$의 값을 구하여라. (단, $\alpha < \beta$)

▶ 답:

▷ 정답: 1

해설

$x * (x-6) = 0$ 에서
$x^2 + x - 6 = 0$
$(x+3)(x-2) = 0$
$\therefore\ x = -3,\ 2$
$\therefore\ \alpha = -3,\ \beta = 2\ (\alpha < \beta)$
$\therefore \alpha + 2\beta = 1$

12. $1 < x < 3$인 x에 대하여 방정식 $x^2 - [x]x - 2 = 0$의 해를 구하여라.
(단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대의 정수)

① 2 ② $1+\sqrt{2}$ ③ $1+\sqrt{3}$
④ $\sqrt{5}-1$ ⑤ $2\sqrt{2}-1$

해설

(ⅰ) $1 < x < 2$일 때, $[x] = 1$
준식은 $x^2 - x - 2 = 0$, $(x-2)(x+1) = 0$
$\therefore\ x = -1$ 또는 $x = 2$
그런데 $1 < x < 2$이므로 만족하는 해가 없다.
(ⅱ) $2 \le x < 3$일 때, $[x] = 2$
준식은 $x^2 - 2x - 2 = 0$이고 근의 공식에 의하여 $x = 1 \pm \sqrt{3}$
그런데 $2 \le x < 3$이므로 만족하는 해는
$x = 1+\sqrt{3}$

13. $0 < x < 2$일 때, 방정식 $2x^2 - x - 3[x] = 0$의 모든 해의 합은?(단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대 정수이다.)

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$2x^2 - x - 3[x] = 0$에서 $0 < x < 2$이므로

(i) $0 < x < 1$일 때, $[x] = 0$이므로

$2x^2 - x = 0, x(2x-1) = 0$

$\therefore x = 0$ 또는 $x = \frac{1}{2}$

그런데 $0 < x < 1$이므로 $x = \frac{1}{2}$

(ii) $1 \le x < 2$일 때, $[x] = 1$이므로

$2x^2 - x - 3 = 0,\ (x+1)(2x-3) = 0$

$\therefore x = -1$ 또는 $\frac{3}{2}$

그런데 $1 \le x < 2$이므로 $x = \frac{3}{2}$

따라서 모든 해의 합은 $\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$

14. $1 < x < 4$일 때, 방정식 $x^2 + [x] = 4x$의 근의 개수는?(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대 정수이다.)

① 1 개　② 2 개　③ 3 개　④ 4 개　⑤ 5 개

해설

(i) $1 < x < 2$일 때, $[x] = 1$이므로
$x^2 - 4x + 1 = 0 \quad \therefore x = 2 \pm \sqrt{3}$
이것은 모두 $1 < x < 2$를 만족하지 않으므로
근이 될 수 없다.
(ii) $2 \le x < 3$일 때, $[x] = 2$이므로
$x^2 - 4x + 2 = 0,\ \therefore x = 2 \pm \sqrt{2}$
이것은 모두 $2 \le x < 3$를 만족하지 않으므로
근이 될 수 없다.
(iii) $3 \le x < 4$일 때, $[x] = 3$이므로
$x^2 - 4x + 3 = 0,\ (x-1)(x-3) = 0$
$\therefore x = 1$ 또는 3
그런데 $3 \le x < 4$를 만족하는 것은 $x = 3$
따라서 주어진 식의 근은 1 개이다.

15. 이차방정식 $x^2-5x+p=0$의 두 근은 $3, \alpha$이고 $x^2-px+q=0$의 두 근은 α, β이다. 이 때 β의 값은?(단 p, q는 상수)

① 2　② 3　③ 4　④ 5　⑤ 6

해설

이차방정식 $x^2-5x+p=0$에서
근과 계수의 관계에 의해
두 근의 합 : $3+\alpha=5 \quad \therefore \alpha=2$
두 근의 곱 : $3\cdot\alpha=p=3\cdot 2=6$
이차방정식 $x^2-6x+q=0$의 두 근이 $2, \beta$이므로
$2+\beta=6 \quad \therefore \beta=4$

16. x에 대한 이차방정식 $x^2+px+q=0$의 한 근이 $2+\sqrt{3}$이 되도록 유리수 p, q를 정할 때, $p+q$의 값은?

① -4 ② -3 ③ -2 ④ 1 ⑤ 2

해설

유리계수 이차식의 한 근이 $2+\sqrt{3}$이면,
그 켤레근인 $2-\sqrt{3}$도 방정식의 근이므로
근과 계수와의 관계에 의해서
$-p=(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=4$
$\therefore\ p=-4$
$q=(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=4-3=1$
$\therefore\ q=1$
$\therefore\ p+q=-4+1=-3$

17. 이차방정식 $x^2 + ax + 2b = 0$의 한 근이 $2 + ai$일 때 실수 a, b의 합 $a + b$의 값은? (단 $a \neq 0$)

① -9 ② -5 ③ 3 ④ 6 ⑤ 12

해설

한 근이 $2 + ai$이므로 다른 한 근은 $2 - ai$이다.
$\therefore$두 근의 합 $-a = 4$ $\quad \therefore a = -4$
두 근의 곱 $(2 - 4i)(2 + 4i) = 4 + 16 = 2b$
$\therefore b = 10 \quad \therefore a + b = 10 - 4 = 6$

18. 이차방정식 $x^2+6x+a=0$의 한 근이 $b+\sqrt{3}i$일 때, $a+b$의 값을 구하여라. (단, a, b는 실수이고 $i=\sqrt{-1}$이다.)

▶ 답:

▷ 정답: 9

해설

계수가 모두 실수이므로
다른 한 근은 $b-\sqrt{3}i$이다.
따라서 두 근의 근과 계수의 관계에서
$a=(b+\sqrt{3}i)(b-\sqrt{3}i)=b^2+3$
$-6=(b+\sqrt{3}i)+(b-\sqrt{3}i)=2b,$
$b=-3,\ a=12$
따라서 $a+b=9$

19. 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$의 한 근이 $2 + \sqrt{5}i$일 때, 실수 a, b에 대하여 ab의 값은?

① -36　② -18　③ 18　④ 24　⑤ 36

해설

a, b가 실수이므로
이차방정식의 한 근이 $2 + \sqrt{5}i$이면
다른 한 근은 $2 - \sqrt{5}i$이다.
근과 계수의 관계의 의하여
$-a = (2 + \sqrt{5}i)(2 - \sqrt{5}i) = 4$
$\therefore a = -4$
$b = (2 + \sqrt{5}i)(2 - \sqrt{5}i) = 9$
$\therefore ab = -36$

20. x에 대한 이차방정식 $x^2+px+q=0$의 한 근이 $2+\sqrt{3}$이 되도록 유리수 p, q를 정할 때, $p+q$의 값은?

① -4 ② -3 ③ -2 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^2+px+q=0$의 한 근이 $2+\sqrt{3}$이고
p, q가 유리수이면 남은 한 근은 $2-\sqrt{3}$이다.
두 근의 합 $-p=2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}=4$
$\therefore p=-4$
두 근의 곱 $q=(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=4-3=1$
$\therefore p+q=-4+1=-3$

21. 이차방정식 $x^2+2x-a=0$의 해가 3 또는 b라 할 때, 상수 $a,\ b$의 합 $a+b$의 값은?

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

해설

$x=3$이 $x^2+2x+a=0$의 근이므로
$3^2+2\cdot3-A=0 \quad \therefore a=15$
$\therefore a=15$를 주어진 방정식에 대입하면
$x^2+2x-15=0,\ (x+5)(x-3)=0$
따라서 $x=-5$ 또는 $x=3$이므로 $b=-5$
$\therefore a+b=15+(-5)=10$

22. x에 대한 이차방정식 $(a+1)x^2-4x+2=0$에 대하여 [보기]의 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $a=1$일 때, 중근을 갖는다.

㉡ $a>1$일 때, 서로 다른 두 허근을 갖는다.

㉢ $a<1$일 때, 서로 다른 두 실근을 갖는다.

① ㉠　② ㉡　③ ㉠, ㉡
④ ㉡, ㉢　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$a \neq -1$일 때, 주어진 방정식은 이차방정식이다.
서로 다른 두 실근을 가질 때
$\frac{D}{4}=4-2(a+1)=2-2a>0$
$\therefore a<1$
따라서 $a<-1$ 또는 $-1<a<1$일 때,
서로 다른 두 실근을 갖는다.
중근을 가질 때
$\frac{D}{4}=2-2a=0$
$\therefore a=1$
따라서, $a=1$일 때, 중근을 갖는다.
서로 다른 두 허근을 가질 때
$\frac{D}{4}=2-2a<0$
$\therefore a>1$
따라서 $a>1$일 때 서로 다른 두 허근을 갖는다.

23. x에 대한 이차방정식 $x^2-2(k-a)x+k^2+a^2-b+1=0$이 k의 값에 관계없이 중근을 가질 때, a, b의 값은?

① $a=1,\ b=1$ ② $a=1,\ b=0$

③ $a=0,\ b=1$ ④ $a=-1,\ b=0$

⑤ $a=-1,\ b=-1$

해설

$\frac{D}{4}=0$이므로,

$(k-a)^2-(k^2+a^2-b+1)=0$

$-2ak+(b-1)=0$

$\therefore\ a=0, b=1$

24. x 에 관한 이차식 $a(1+x^2)+2bx+c(1-x^2)$ 에서 $a,\ b,\ c$ 가 삼각형의 세 변의 길이를 나타낼 때, 이 이차식이 x 에 관한 완전제곱식이 되는 것은 이 삼각형이 어떠한 삼각형일 때인가?

① a 를 빗변으로 하는 직각삼각형

② c 를 빗변으로 하는 직각삼각형

③ $a=b$ 인 이등변삼각형

④ $b=c$ 인 이등변삼각형

⑤ 정삼각형

해설

준식을 정리하면,
$(a-c)x^2+2bx+a+c$
위의 식이 완전제곱식이 되려면
$D=0$ 이어야 하므로
$\frac{D}{4}=b^2-(a-c)(a+c)=0,$
즉 $b^2-a^2+c^2=0$
$\therefore\ a^2=b^2+c^2$
따라서, a 를 빗변으로 하는 직각삼각형

25. 방정식 $|x+1|+\sqrt{(x-2)^2}=x+3$의 근을 α, β라 할 때 $\alpha+\beta$의 값을 구하면?

① 0 ② 4 ③ 3 ④ 2 ⑤ 1

해설

i) $x<-1$일 때,
$-(x+1)-(x-2)=x+3$
$\therefore\ x=-\frac{2}{3}$ ($x<-1$에 부적합)
ii) $-1 \le x < 2$일 때,
$x+1-(x-2)=x+3$
$\therefore\ x=0$
iii) $x \ge 2$일 때,
$x+1+x-2=x+3$
$\therefore\ x=4$
(i), (ii), (iii)에 의해 $x=0,\ 4$
$\therefore\ \alpha+\beta=4$

26. 이차식 $x^2 - xy - 6y^2 + ay - 1$이 두 일차식의 곱으로 나타내어질 때, 양수 a의 값은?

① 1　② 3　③ 5　④ 10　⑤ 12

해설

$x^2 - xy - 6y^2 + ay - 1 = 0$에서 근의 공식을 이용하면

$$x = \frac{y \pm \sqrt{y^2 - 4(-6y^2 + ay - 1)}}{2}$$

$$= \frac{y \pm \sqrt{25y^2 - 4ay + 4}}{2}$$

일차식의 곱으로 인수분해가 되려면 $\sqrt{}$안에 있는 $25y^2 - 4ay + 4$가 완전제곱식이 되어야 한다.

즉, $25y^2 - 4ay + 4 = (5y \pm 2)^2$

$\therefore -4a = \pm 20$,

$a = \pm 5$

$\therefore$ 양수 a는 5

27. $x,\ y$ 에 대한 이차식 $f(x,\ y) = x^2 + 2(y-1)x + y^2 + ky - 3$ 이 $x,\ y$ 의 두 일차식으로 인수분해될 때, 실수 k 의 값을 구하면?

① -3　　② -2　　③ -1　　④ 1　　⑤ 2

해설

이차방정식 $x^2 + 2(y-1)x + y^2 + ky - 3 = 0$ 의 두 근을 구하면 근의 공식에 의하여

$$x = -(y-1) \pm \sqrt{(y-1)^2 - (y^2 + ky - 3)}$$
$$= -(y-1) \pm \sqrt{-(2+k)y + 4} \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

한편, $x^2 + ax + b = 0$ 의 두 근이 $\alpha,\ \beta$ 이면

$x^2 + ax + b = (x-\alpha)(x-\beta)$ 이고

준식이 $x,\ y$ 의 일차식으로 인수분해되므로

x 의 두 근 ㉠에서 $-(2+k)y + 4$ 가 완전제곱 꼴이 되어야 한다.

따라서 근호 안의 판별식 D 는 0 이어야 한다.

$\therefore\ D = (2+k)^2 - 4 \cdot 0 \cdot 4 = 0$

$2 + k = 0$

$\therefore\ k = -2$

28. $x^2+5xy+ay^2+y-2$가 x, y의 두 일차식의 곱으로 나타내어질 때, 상수 a의 값은?

① $\frac{8}{49}$ ② $\frac{49}{8}$ ③ 49 ④ 8 ⑤ 0

해설

$x^2+5xy+ay^2+y-2$를 x에 대해 정리하면
$x^2+5yx+ay^2+y-2$
이 이차식이 두 개의 일차식으로 인수분해 되려면
판별식이 완전제곱식이 되어야 한다.
$D=(25-4a)y^2-4y+8$
$\frac{D'}{4}=4-8(25-4a)=0,$
$4-200+32a=0$
$\therefore\ a=\frac{49}{8}$

29. $x^2 - xy - 6y^2 + x + 7y + k$가 x, y에 대한 두 일차식의 곱으로 인수분해 되도록 상수 k의 값을 정하면?

① -2　② -4　③ 0　④ 2　⑤ 4

해설

x에 관해 식을 정리하면
$f(x) = x^2 + (1-y)x + (-6y^2 + 7y + k)$
$f(x)$가 두개의 일차식으로 인수분해 되려면
$D = (1-y)^2 - 4(-6y^2 + 7y + k)$가 완전제곱식이어야 한다.
$D = 25y^2 - 30y + (1-4k)$에서
$\frac{D}{4} = (-15)^2 - 25(1-4k) = 0$
$\therefore\ k = -2$

30. 0이 아닌 세 실수 a, b, c가 $\frac{b}{a} = \frac{a}{b} = \frac{a}{c}$를 만족할 때, 이차방정식 $cx^2+bx+a=0$의 한 근을 복소수 α라 하자. 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고르면?

㉠ $\alpha^2+\alpha+1=0$	㉡ $\alpha+\overline{\alpha}=-1$
㉢ $\frac{1}{\alpha}=\overline{\alpha}$	㉣ $\alpha^2=\overline{\alpha}$

① ㉠, ㉡　② ㉠, ㉡, ㉢　③ ㉠, ㉢, ㉣
④ ㉡, ㉢, ㉣　⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣

해설

$\frac{b}{a} = \frac{a}{b} = \frac{a}{c} = k \Rightarrow b = ak,\ c = bk,\ a = ck$

변변끼리 곱하면 $abc = abck^3$

$abc \neq 0$이므로 $k^3 = 1$

$\therefore k = 1 \quad \therefore\ a = b = c$

$cx^2 + bx + a = 0 \Leftrightarrow x^2 + x + 1 = 0$

한 근을 α라 하면 다른 한 근은 $\overline{\alpha}$이다

㉠ $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$

㉡ $\alpha + \overline{\alpha} = -1$

㉢ $\alpha\overline{\alpha} = 1,\ \frac{1}{\alpha} = \overline{\alpha}$

㉣ $x^2 + x + 1 = 0$의 근을 구해보면

$\alpha = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} \quad \overline{\alpha} = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

$\therefore\ \alpha^2 = \overline{\alpha}$

31. $x^2-3x+1=0$의 두 근을 α, β라 하고, $g(x)=x^3-x^2-3x+3$라 할 때, $g(\alpha)\cdot g(\beta)$의 값은?

① 1 ② 3 ③ 8 ④ 11 ⑤ 13

해설

근과 계수와의 관계에서 $\alpha+\beta=3,\ \ \alpha\beta=1$

또, $g(x)=x^3-x^2-3x+3$

$=(x^2-3x+1)(x+2)+2x+1$

$\alpha,\ \beta$는 $x^2-3x+1=0$의 근이므로

$g(\alpha)=2\alpha+1,\ g(\beta)=2\beta+1$

$\therefore\ g(\alpha)g(\beta)=(2\alpha+1)(2\beta+1)$

$=4\alpha\beta+2(\alpha+\beta)+1$

$=4+6+1=11$

32. 정수 a, b에 대하여 삼차방정식 $x^3 + ax^2 + b = 0$의 세 근을 α, β, γ라 할 때, $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$의 값에 대한 설명으로 옳은 것은?

① 무리수이다. ② 정수가 아닌 유리수이다.

③ 정수이다. ④ 홀수인 자연수이다.

⑤ 짝수인 자연수이다.

해설

근과 계수와의 관계에서

$\alpha + \beta + \gamma = -a$(정수) , $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 0$, $\alpha\beta\gamma = -b$

$\therefore\ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)$

$= a^2$(정수)

$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$

$= (\alpha + \beta + \gamma)\{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)\} + 3\alpha\beta\gamma$

$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = -a(a^2 - 0) - 3b = -a^3 - 3b$(정수)

그러나 $a > 0,\ b > 0$이면

$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$은 자연수가 되지는 못한다.

33. x에 관한 이차방정식 $x^2+nx+p=0$의 두 근을 α,β라 하고, $x^2+nx+q=0$의 두 근을 γ,δ라 할 때, $(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)$를 p,q로 나타내면?

① $(p+q)^2$ ② $(2p+q)^2$ ③ $(p-2q)^2$

④ $(p-q)^2$ ⑤ $(2p-3q)^2$

해설

근과 계수와의 관계에서

$\alpha+\beta=-n,\ \alpha\beta=p,\ \gamma+\delta=-n,\ \gamma\delta=q$이므로

주어진 식 $=\{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)\}\{(\alpha-\delta)(\beta-\delta)\}$

$=\{\gamma^2-(\alpha+\beta)\gamma+\alpha\beta\}\{\delta^2-(\alpha+\beta)\delta+\alpha\beta\}$

$=(\gamma^2+n\gamma+p)(\delta^2+n\delta+p)$

그런데, $\gamma^2+n\gamma+q=0$에서

$\gamma^2+n\gamma+p=p-q$

또, $\delta^2+n\delta+q=0$에서

$\delta^2+n\delta+p=p-q$

따라서, 주어진 식$=(p-q)^2$

34. 이차방정식 $x^2+3x+1=0$의 두 근을 α,β라 할 때, $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$의 값을 계산하면?

① $\sqrt{5}i$ ② $-\sqrt{5}i$ ③ $\sqrt{5}$ ④ $-\sqrt{5}$ ⑤ $\pm\sqrt{5}i$

해설

$\alpha+\beta=-3<0$, $\alpha\beta=1>0$, $D=9-4>0$이므로 두 근은 모두 음수이다.

$(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2=(\sqrt{\alpha})^2+(\sqrt{\beta})^2+2\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}$

$=\alpha+\beta-2\sqrt{\alpha\beta}$ ($\because$ $\alpha<0$, $\beta<0$이므로)

$=-3-2=-5$

$\therefore$ $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\pm\sqrt{5}i$

한편, $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\sqrt{(-\alpha)\cdot(-1)}+\sqrt{(-\beta)\cdot(-1)}$

$=\sqrt{-\alpha}\cdot i+\sqrt{-\beta}\cdot i$

$=(\sqrt{-\alpha}+\sqrt{-\beta})\cdot i$

$\therefore$ $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$ 는 (양수)$\times i$ 꼴이다.

$\therefore$ $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\sqrt{5}i$

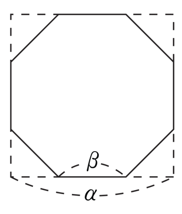
35. 서로 다른 두 실수 a, b에 대하여 두 방정식 $x^2 + 2ax + b = 0$과 $x^2 + 2bx + a = 0$의 두 근의 차가 서로 같을 때, a, b의 관계식은?

① $a + b = 0$ ② $a - b - 1 = 0$ ③ $a - b + 1 = 0$
④ $a + b - 1 = 0$ ⑤ $a + b + 1 = 0$

해설

$x^2 + 2ax + b = 0$의 해를 α, β
$x^2 + 2bx + a = 0$의 해를 γ, δ라 하면
$|\alpha - \beta| = |\gamma - \delta|$에서
$(\alpha - \beta)^2 = (\gamma - \delta)^2$,
$(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = (\gamma + \delta)^2 - 4\gamma\delta$
$(-2a)^2 - 4b = (-2b)^2 - 4a$
$\therefore\ (a - b)(a + b + 1) = 0$
$a \neq b$이므로 $a + b + 1 = 0$

36. 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 α 인 정사각형의 네 귀퉁이를 잘라 정8각형을 만들고 그 한 변의 길이를 β 라 하면, α, β 는 이차방정식 $x^2 + px + (\sqrt{2}+1) = 0$ 의 두 근이 된다고 한다. 다음 중 α, p 의 값으로 옳은 것은?



① $\alpha = \sqrt{2}, \quad p = \sqrt{2} - 1$

② $\alpha = \sqrt{2}, \quad p = -\dfrac{3\sqrt{2}}{2} - 1$

③ $\alpha = \sqrt{2} + 1, \quad p = -\sqrt{2}$

④ $\alpha = \sqrt{2} + 1, \quad p = -\sqrt{2} - 2$

⑤ $\alpha = \sqrt{2} - 1, \quad p = -\sqrt{2} - 1$

해설

잘라낸 귀퉁이는 빗변의 길이가 β 인 직각이등변삼각형이므로

다른 한 변의 길이는 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\beta$ 이다.

$2 \times \dfrac{\sqrt{2}}{2}\beta + \beta = \alpha$ 이므로

$\beta = \dfrac{\alpha}{\sqrt{2}+1} = (\sqrt{2}-1)\alpha$

α, β 는 $x^2 + px + (\sqrt{2}+1) = 0$ 의 두 근이므로

$\alpha\beta = (\sqrt{2}-1)\alpha^2 = \sqrt{2}+1$ 에서

$\alpha^2 = \dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = (\sqrt{2}+1)^2$

$\alpha > 0$ 이므로 $\alpha = \sqrt{2}+1$

$\therefore \; p = -(\alpha+\beta) = -\left\{\alpha + (\sqrt{2}-1)\alpha\right\} = -\sqrt{2} - 2$

37. 실계수 이차방정식이 두 허근 α, β를 갖고 $\alpha^2 + 2\beta = 1$일 때, 이 이차방정식은?

① $x^2 + 2x + 3 = 0$　　② $x^2 + 4x + 6 = 0$

③ $x^2 - 2x + 3 = 0$　　④ $x^2 - 4x + 6 = 0$

⑤ $x^2 - 3x + 2 = 0$

해설

$\alpha = m + ni,\ \beta = m - ni$

$(m,\ n\ :\ $ 실수$,\ n \neq 0)$라 놓으면

$$\alpha^2 + 2\beta = (m+ni)^2 + 2(m-ni)$$
$$= (m^2 - n^2 + 2m) + 2n(m-1)i = 1$$ 에서

$n \neq 0$이므로 $m = 1,\ n^2 = 2$

$\alpha + \beta = 2m = 2$

$\alpha\beta = m^2 + n^2 = 3$

$\therefore\ \alpha,\ \beta$를 두 근으로 갖는 이차방정식은

$x^2 - 2x + 3 = 0$

38. 다음 세 조건을 만족하는 이차방정식 $x^2 - ax + b = 0$은 몇 개 존재하는가?

> (가) a, b, c, d는 100이하의 서로 다른 자연수이다.
> (나) c, d는 양의 약수를 3개만 갖는 자연수이다.
> (다) c, d는 방정식 $x^2 - ax + b = 0$의 두 근이다.

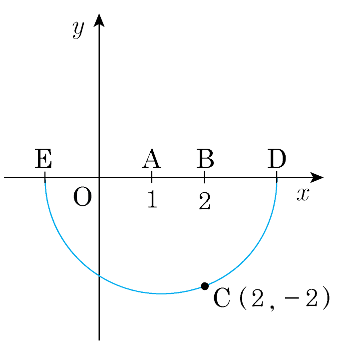
① 1가지 ② 2가지 ③ 3가지
④ 4가지 ⑤ 5가지

해설

양의 약수가 홀수 개인 자연수는 완전제곱수이다.
1이 아닌 어떤 수 a^2에 대하여
약수는 일단 1, a^2, a의 세 개가 있는데
더 이상의 약수가 존재하지 않으면 a는 소수이다.
즉 c, d는 소수의 제곱수로 100이하이므로
2^2, 3^2, 5^2, 7^2의 네 가지 중에 있다.
조건 (다)에서 $a = c + d$, $b = cd$이고
a, b는 100이하의 자연수이므로

$$\begin{cases} a = 2^2 + 3^2 \\ b = 2^2 \cdot 3^2 \end{cases}, \begin{cases} a = 2^2 + 5^2 \\ b = 2^2 \cdot 5^2 \end{cases}$$ 의 두 가지

39. 다음의 그림에서 점 C, D, E는 점 A를 중심으로 하는 반원 위에 있다. 계수가 유리수인 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ $(a < 0)$의 그래프가 점 E를 지날 때, 반드시 지나는 또 다른 점을 구하면?



① A ② B ③ C

④ D ⑤ O

해설

$\overline{AC} = \sqrt{(2-1)^2 + (-2-0)^2} = \sqrt{5}$이므로

$\overline{AD} = \overline{AE} = \sqrt{5}$ 이다.

$\therefore$ 점 D 의 좌표는 $(1+\sqrt{5},\ 0)$,

점 E 의 좌표는 $(1-\sqrt{5},\ 0)$ 이다.

그런데, 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ $(a < 0)$ 의 그래프가 점 E를 지나므로

$x = 1 - \sqrt{5}$ 는 방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 근이다.

여기서, a, b, c 가 유리수이므로 $x = 1 + \sqrt{5}$

($\because$ 켤레근) 또한 방정식의 근이 된다.

따라서, 그래프는 점 $D(1+\sqrt{5},\ 0)$ 을 지난다.

40. 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서 $a>0,\ b>0,\ b^2-4ac>0$일 때, 다음 설명 중 옳은 것은?

① 두 근은 모두 음이다.

② 음근을 가질 수 없다.

③ 적어도 한 개의 음근을 갖는다.

④ 두 근은 모두 양이다.

⑤ 양근 한 개, 음근 한 개를 갖는다.

해설

$b^2-4ac>0$이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.
서로 다른 두 실근을 $\alpha,\ \beta$라 하면

$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}<0,\ \alpha\beta=\frac{c}{a}$

(i) $c>0$이면 $\alpha\beta>0$이므로 두 근은 모두 음
(ii) $c<0$이면 $\alpha\beta<0$이므로 두 근은 양, 음
(iii) $c=0$이면 $\alpha\beta=0$이므로 두 근은 음, 0

41. 사차방정식 $x^4 + (2k+1)x^2 + k^2 - 5 = 0$이 서로 다른 두 개의 실근과 서로 다른 두 개의 허근을 갖도록 실수 k의 값을 정할 때, k의 최대 정수값 M과 k의 최소 정수값 m의 곱 $M \cdot m$을 구하면?

① -4 ② 2 ③ -2 ④ -6 ⑤ 1

해설

$x^2 = t$로 놓으면 주어진 사차방정식은
$t^2 + (2k+1)t + k^2 - 5 = 0 \cdots$ ①
사차방정식이 서로 다른 두 실근과 서로 다른 두 허근을 가지려면
방정식 ①이 서로 다른 부호의 실근을 가져야 하므로
두 근의 곱 : $k^2 - 5 < 0$
$\therefore\ -\sqrt{5} < k < \sqrt{5}\ \ (\sqrt{5} \fallingdotseq 2.236\cdots)$
$\therefore\ M = 2,\ m = -2$
$\therefore\ M \cdot m = -4$

42. x의 방정식 $x^4 - 2(3k+1)x^2 + 7k^2 + 3k = 0$이 서로 다른 네 개의 실근을 갖기 위한 실수 k의 값의 범위를 구하면?

① $k > 0$　　② $k < 0$　　③ $k > 1$

④ $k < 1$　　⑤ $0 < k < 1$

해설

$x^2 = X$로 놓으면

$X^2 - 2(3k+1)X + 7k^2 + 3k = 0$

이것이 서로 다른 양의 실근을 가지면 되므로

$\frac{D}{4} = (3k+1)^2 - (7k^2 + 3k) > 0,$

$\alpha + \beta = 2(3k+1) > 0,\ \ \alpha\beta = 7k^2 + 3k > 0$

$\therefore\ k > 0$

43. 4차방정식 $x^4 + (m+2)x^2 + m + 5 = 0$이 서로 다른 네 개의 실근을 갖기 위한 정수 m의 값의 개수는?

① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

$x^2 = X$로 놓으면
$X^2 + (m+2)X + m + 5 = 0 \cdots\cdots$ ①이 서로 다른 양의 실근을 가질 때,
준 방정식은 서로 다른 네 실근을 가지므로
①의 두 근을 α, β라 할 때,
$D = (m+2)^2 - 4(m+5) > 0$, $\alpha+\beta = -(m+2) > 0$, $\alpha\beta = m+5 > 0$
이 세 식을 동시에 만족시키는 범위는
$-5 < m < -4$

44. x에 대한 이차방정식 $x^2-(p+1)x+p+5=0$의 두근 α, β가 모두 양의 정수일 때, $\alpha>\beta$를 만족하는 순서쌍 $(\alpha,\ \beta)$의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ____ 개

▷ 정답 : 1 개

해설

근과 계수와의 관계에 의해

$\alpha+\beta=p+1,\ \alpha\beta=p+5$

$\therefore \alpha+\beta-1=\alpha\beta-5$

$\therefore (\alpha-1)(\beta-1)=5$

α, β 모두 양의 정수이고, $\alpha>\beta$이므로

$\alpha-1=5,\quad \beta-1=1$

$\alpha=6,\quad \beta=2$

$\therefore (6,\ 2)$ 1 개