

1. 원 $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 1 = 0$ 과 같은 중심을 갖고, 점 $(1, 2)$ 를 지나는 원의 반지름을 r 이라 할 때, r^2 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 26

해설

준 식에서 $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 14$ 이므로

중심은 $(2, -3)$ 이다.

구하는 원의 반지름을 r 라 하면

$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = r^2$ 이고,

이 원이 점 $(1, 2)$ 를 지나므로

$(1 - 2)^2 + (2 + 3)^2 = r^2$

$\therefore r^2 = 26$

2. 원 $x^2 + y^2 + 2ax - 4ay + 20a - 25 = 0$ 의 넓이가 최소일 때, 이 원의 중심의 좌표가 (p, q) 이다. 이 때 $p - q$ 의 값은?

① -6 ② -4 ③ -2 ④ 2 ⑤ 4

해설

$x^2 + y^2 + 2ax - 4ay + 20a - 25 = 0$ 을

표준형으로 고치면

$$(x + a)^2 + (y - 2a)^2 = 5a^2 - 20a + 25$$

이 원의 넓이는

$$\pi(5a^2 - 20a + 25) = 5\pi(a - 2)^2 + 5\pi$$

따라서 $a = 2$ 일 때 넓이가 최소.

중심은 $(-2, 4)$

$$\therefore p = -2, q = 4$$

$$\therefore p - q = -6$$

3. x 축에 접하고 두 점 $(3, 1)$, $(-4, 8)$ 을 지나는 원 중, 반지름의 크기가 큰 원의 방정식을 구하면?

- ① $(x-3)^2+(y-12)^2=169$
- ② $x^2+(y-5)^2=169$
- ③ $x^2+(y-5)^2=25$
- ④ $(x-8)^2+(y-13)^2=169$
- ⑤ $(x-8)^2+(y-13)^2=25$

해설

구하는 원의 중심을 (a, b) 라고 하면
 x 축에 접하는 원의 방정식은
 $(x-a)^2+(y-b)^2=b^2$
이 원이 두 점 $(3, 1)$, $(-4, 8)$ 을 지나므로
 $(3-a)^2+(1-b)^2=b^2 \dots\dots \textcircled{1}$
 $(-4-a)^2+(8-b)^2=b^2 \dots\dots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}-\textcircled{2}$ 에서
 $b=a+5 \dots\dots \textcircled{3}$
 $\textcircled{3}$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면
 $a^2-8a=a(a-8)=0 \therefore a=0$ 또는 $a=8$
 $\textcircled{3}$ 에서 $a=0$ 일 때 $b=5$, $a=8$ 일 때 $b=13$
따라서 구하는 원의 방정식은
 $x^2+(y-5)^2=5^2$ 또는
 $(x-8)^2+(y-13)^2=13^2$

4. 중심이 직선 $y = x + 1$ 위에 있고 두 점 $(1, 6)$, $(-3, 2)$ 를 지나는 원의 중심의 좌표를 (a, b) 라고 할 때, $a + b$ 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

중심이 $y = x + 1$ 위에 있고,

중심의 좌표가 (a, b) 이므로 $b = a + 1$

따라서 $(a, a + 1)$ 이라 할수 있다.

중심과 $(1, 6)$, $(-3, 2)$ 간의 거리가 반지름으로 같으므로

$$\sqrt{(a-1)^2 + (a+1-6)^2}$$

$$= \sqrt{(a+3)^2 + (a+1-2)^2}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$(a-5)^2 = (a+3)^2$$

$$16a = 16$$

$$\therefore a = 1$$

$$\therefore (a, b) = (1, 2)$$

$$\text{따라서 } a + b = 1 + 2 = 3$$

5. 원 $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ 이 x 축과 y 축에 동시에 접할 때, $c = ka^2$ 이 성립한다. 이 때, 상수 k 의 값은?

- ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{1}{6}$

해설

$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ 을 표준형으로 나타내면

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4}$$

따라서, 중심이 $\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$ 이고

반지름의 길이가 $\frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2}$ 이므로

이 원이 x 축과 y 축에 동시에 접하기 위해서는

$$\left|-\frac{a}{2}\right| = \left|-\frac{b}{2}\right| = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2} \text{ 이어야 한다.}$$

$$(i) \left|-\frac{a}{2}\right| = \left|-\frac{b}{2}\right| \text{ 에서 } |a| = |b|$$

$$\therefore a^2 = b^2 \dots\dots\textcircled{1}$$

$$(ii) \left|-\frac{a}{2}\right| = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2} \text{ 의 양변을 제곱하면 } \frac{a^2}{4} = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4}$$

$$\therefore b^2 = 4c \dots\dots\textcircled{2}$$

①을 ②에 대입하면 $a^2 = 4c$

$$\therefore c = \frac{1}{4}a^2$$

$$\therefore k = \frac{1}{4}$$