

1. 원 $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 1 = 0$ 과 같은 중심을 갖고, 점 $(1, 2)$ 를 지나는 원의 반지름을 r 이라 할 때, r^2 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 26

해설

준 식에서 $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 14$ 이므로
중심은 $(2, -3)$ 이다.

구하는 원의 반지름을 r 라 하면

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = r^2 \text{ 이고,}$$

이 원이 점 $(1, 2)$ 를 지나므로

$$(1 - 2)^2 + (2 + 3)^2 = r^2$$

$$\therefore r^2 = 26$$

2. 원 $x^2 + y^2 + 2ax - 4ay + 20a - 25 = 0$ 의 넓이가 최소일 때, 이 원의 중심의 좌표가 (p, q) 이다. 이 때 $p - q$ 의 값은?

① -6

② -4

③ -2

④ 2

⑤ 4

해설

$x^2 + y^2 + 2ax - 4ay + 20a - 25 = 0$ 을
표준형으로 고치면

$$(x + a)^2 + (y - 2a)^2 = 5a^2 - 20a + 25$$

이 원의 넓이는

$$\pi(5a^2 - 20a + 25) = 5\pi(a - 2)^2 + 5\pi$$

따라서 $a = 2$ 일 때 넓이가 최소.

중심은 $(-2, 4)$

$$\therefore p = -2, q = 4$$

$$\therefore p - q = -6$$

3. x 축에 접하고 두 점 $(3, 1)$, $(-4, 8)$ 을 지나는 원 중, 반지름의 크기가 큰 원의 방정식을 구하면?

① $(x-3)^2 + (y-12)^2 = 169$

② $x^2 + (y-5)^2 = 169$

③ $x^2 + (y-5)^2 = 25$

④ $(x-8)^2 + (y-13)^2 = 169$

⑤ $(x-8)^2 + (y-13)^2 = 25$

해설

구하는 원의 중심을 (a, b) 라고 하면

x 축에 접하는 원의 방정식은

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = b^2$$

이 원이 두 점 $(3, 1)$, $(-4, 8)$ 을 지나므로

$$(3-a)^2 + (1-b)^2 = b^2 \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$(-4-a)^2 + (8-b)^2 = b^2 \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠ - ㉡에서

$$b = a + 5 \dots\dots \textcircled{㉢}$$

㉢을 ㉠에 대입하면

$$a^2 - 8a = a(a-8) = 0 \quad \therefore a = 0 \text{ 또는 } a = 8$$

㉢에서 $a = 0$ 일 때 $b = 5$, $a = 8$ 일 때 $b = 13$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$x^2 + (y-5)^2 = 5^2 \text{ 또는}$$

$$(x-8)^2 + (y-13)^2 = 13^2$$

4. 중심이 직선 $y = x + 1$ 위에 있고 두 점 $(1, 6)$, $(-3, 2)$ 를 지나는 원의 중심의 좌표를 (a, b) 라고 할 때, $a + b$ 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

중심이 $y = x + 1$ 위에 있고,

중심의 좌표가 (a, b) 이므로 $b = a + 1$

따라서 $(a, a + 1)$ 이라 할수 있다.

중심과 $(1, 6)$, $(-3, 2)$ 간의 거리가 반지름으로 같으므로

$$\begin{aligned} & \sqrt{(a-1)^2 + (a+1-6)^2} \\ &= \sqrt{(a+3)^2 + (a+1-2)^2} \end{aligned}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$(a-5)^2 = (a+3)^2$$

$$16a = 16$$

$$\therefore a = 1$$

$$\therefore (a, b) = (1, 2)$$

$$\text{따라서 } a + b = 1 + 2 = 3$$

5. 원 $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ 이 x 축과 y 축에 동시에 접할 때, $c = ka^2$ 이 성립한다. 이 때, 상수 k 의 값은?

① $\frac{1}{2}$

② $\frac{1}{3}$

③ $\frac{1}{4}$

④ $\frac{1}{5}$

⑤ $\frac{1}{6}$

해설

$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ 을 표준형으로 나타내면

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4}$$

따라서, 중심이 $\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$ 이고

반지름의 길이가 $\frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2}$ 이므로

이 원이 x 축과 y 축에 동시에 접하기 위해서는

$$\left|-\frac{a}{2}\right| = \left|-\frac{b}{2}\right| = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2} \text{ 이어야 한다.}$$

$$(i) \left|-\frac{a}{2}\right| = \left|-\frac{b}{2}\right| \text{ 에서 } |a| = |b|$$

$$\therefore a^2 = b^2 \dots\dots \textcircled{A}$$

$$(ii) \left|-\frac{a}{2}\right| = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2} \text{ 의 양변을 제곱하면 } \frac{a^2}{4} = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4}$$

$$\therefore b^2 = 4c \dots\dots \textcircled{B}$$

$$\textcircled{A} \text{ 을 } \textcircled{B} \text{ 에 대입하면 } a^2 = 4c$$

$$\therefore c = \frac{1}{4}a^2$$

$$\therefore k = \frac{1}{4}$$