1. 이차방정식 $x^2+(k-4)x+k-1=0$ 이 중근을 가지도록 상수 k 의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

판별식을 D 라 하면,
$D=0$ 일 때 중근을 가지므로
$D=(k-4)^2-4(k-1)=k^2-12k+20=0$ 에서
$(k-2)(k-10)=0$
따라서, $k=2,\ k=10$ 이므로 k 의 값은 12 이다.

2. x에 대한 이차방정식 $(k^2-1)x^2-2(k-1)x+1=0$이 허근을 가질 때, $k>m$이다. m의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$(k^2-1)x^2-2(k-1)x+1=0$이

허근을 가지려면

$\dfrac{D}{4}=(k-1)^2-(k^2-1)<0$

$(k^2-2k+1)-(k^2-1)<0$

$-2k+2<0,\ k>1$

$\therefore\ m=1$

3. 이차방정식 $x^2 - 3x + 2 = 0$의 두 근을 α, β라고 할 때, $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$의 값은?

① $-\frac{3}{2}$ ② $-\frac{2}{3}$ ③ $-\frac{1}{6}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

해설

$x^2 - 3x + 2 = 0$

$(x-2)(x-1) = 0$

$x = 1$ 또는 $x = 2$이므로 $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

4. 이차식 $x^2 + 2x + 4$ 를 일차식의 곱으로 인수분해 하여라.

① $(x+1-\sqrt{3}i)(x+1+\sqrt{3}i)$

② $(x+1-\sqrt{3})(x+1+\sqrt{3})$

③ $(x+1-\sqrt{2}i)(x+1+\sqrt{2}i)$

④ $(x+1-\sqrt{2})(x+1+\sqrt{2})$

⑤ $(x-1-\sqrt{2}i)(x-1+\sqrt{2}i)$

해설

$x^2 + 2x + 4 = 0$ 의 해를 구하면

$x = -1 \pm \sqrt{1-4} = -1 \pm \sqrt{3}i$

$\therefore x^2 + 2x + 4$

$= \left\{x - (-1 + 3\sqrt{i}\right\} \left\{x - (-1 - \sqrt{3}i)\right\}$

$= (x+1-\sqrt{3}i)(x+1+\sqrt{3}i)$

5. 이차함수 $y = x^2 - 8x + a$의 그래프와 x축과의 교점의 x좌표가 6, b일 때, $a+b$의 값은?

① 11　　② 12　　③ 13　　④ 14　　⑤ 15

해설

이차함수 $y = x^2 - 8x + a$의 그래프와
x축과의 교점의 x좌표는
이차방정식 $x^2 - 8x + a = 0$의 실근이다.
$x^2 - 8x + a = 0$에 $x = 6$을 대입하면
$36 - 48 + a = 0$에서 $a = 12$
따라서 $x^2 - 8x + 12 = 0$에서 $(x-2)(x-6) = 0$
$x = 2$ 또는 $x = 6$
$\therefore\ b = 2 \therefore\ a + b = 14$

6. 이차방정식 $x^2+6x+a=0$의 한 근이 $b+\sqrt{3}i$일 때, $a+b$의 값을 구하여라. (단, a, b는 실수이고 $i=\sqrt{-1}$이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

계수가 모두 실수이므로
다른 한 근은 $b-\sqrt{3}i$이다.
따라서 두 근의 근과 계수의 관계에서
$a=(b+\sqrt{3}i)(b-\sqrt{3}i)=b^2+3$
$-6=(b+\sqrt{3}i)+(b-\sqrt{3}i)=2b$,
$b=-3,\ a=12$
따라서 $a+b=9$

7. 다음 설명 중 <u>틀린</u> 것을 고르면?

① $x^2+5x+1=0$은 서로 다른 두 실근 을 가진다.

② $x^2+5=0$는 두 허근을 가진다.

③ $m=0$ 또는 4일 때, $x^2-mx+m=0$은 중근을 가진다.

④ $k \geqq 1$일 때 $x^2-2x+2-k=0$은 서로 다른 두 실근을 가진다

⑤ $x^2-6x+a=0$ 은 $a=9$일 때만 중근을 가진다.

해설

① $25-4\cdot1\cdot1=21>0$

② $0^2-4\cdot1\cdot1=-4<0$

③ $(-m)^2-4\cdot1\cdot m=m(m-4)=0$

⑤ $9-1\cdot a=9-a=0,\ a=9$

$\Rightarrow$ ④ $(-1)^2-1\cdot(2-k)=k-1>0\ \therefore\ k>1$

8. 이차방정식 $x^2-3x+1=0$의 두 근을 α,β라고 할 때, $\alpha^3+\beta^3$의 값은?

① 15　② 16　③ 17　④ 18　⑤ 20

해설

근과 계수와의 관계로부터

$\alpha+\beta=3,\quad \alpha\beta=1$

$\therefore \alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$=27-9=18$

9. 이차방정식 $3x^2+6x-2=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, $(\alpha-\beta)^2$의 값은?

① $\frac{7}{3}$ ② $\frac{20}{3}$ ③ 7 ④ 20 ⑤ -12

해설

$$|\alpha-\beta|=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{|a|}=\frac{\sqrt{60}}{3}$$

$$\therefore\quad (\alpha-\beta)^2=|\alpha-\beta|^2=\frac{60}{9}=\frac{20}{3}$$

10. 두 수 $1+2i$, $1-2i$를 근으로 하고, x^2의 계수가 1인 이차방정식은?

① $x^2-2x-5=0$

② $x^2+2x+5=0$

③ $x^2+5x+2=0$

④ $x^2-2x+5=0$

⑤ $x^2-5x+2=0$

해설

$\alpha+\beta=(1+2i)+(1-2i)=2$

$\alpha\beta=(1+2i)(1-2i)=5$

$\therefore x^2-2x+5=0$

11. 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$에서 b를 잘못 보아 두 근 $\frac{1}{2}$, 4를 얻었고, c를 잘못 보아 -1, 4의 두 근을 얻었다. 이 때, 옳은 근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

(i) b를 잘못 본 경우
a와 c는 옳으므로 두 근의 곱은
$\frac{1}{2} \cdot 4 = \frac{c}{a} \quad \therefore\ c = 2a$
(ii) c를 잘못 본 경우
a와 b는 옳으므로 두 근의 합은
$-1 + 4 = 3 = -\frac{b}{a} \quad \therefore\ b = -3a$
(i), (ii)에서 주어진 방정식은
$ax^2 - 3ax + 2a = 0$
$a \neq 0$이므로 $x^2 - 3x + 2 = 0$
$(x-1)(x-2) = 0$
$\therefore\ x = 1$ 또는 $x = 2$
따라서 근의 합은 3이다.

12. 이차함수 $y = x^2 + (k-3)x + k$ 의 그래프가 x 축과 만나지 않을 때, 실수 k 의 값의 범위는?

① $-1 < k < 7$ ② $-1 < k < 8$ ③ $0 < k < 9$

④ $1 < k < 9$ ⑤ $1 < k < 10$

해설

주어진 이차함수의 그래프가
x 축과 만나지 않으려면
이차방정식 $x^2 + (k-3)x + k = 0$ 이
실근을 갖지 않아야 하므로
$D = (k-3)^2 - 4k < 0$
$k^2 - 10k + 9 < 0$, $(k-1)(k-9) < 0$
$\therefore\ 1 < k < 9$

13. 이차함수 $y = x^2 - kx + 4$ 의 그래프와 x축이 서로 다른 두 점에서 만날 때, 실수 k의 값 또는 k의 값의 범위를 구하면?

① $k < -4$ 또는 $k > 4$
② $k < -2$ 또는 $k > 2$
③ $k < -1$ 또는 $k > 1$
④ $k < -\frac{2}{3}$ 또는 $k > \frac{2}{3}$
⑤ $k < -\frac{1}{4}$ 또는 $k > \frac{1}{4}$

해설

이차방정식 $x^2 - kx + 4 = 0$ 에서 $D = (-k)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = k^2 - 16$
$D = K^2 - 16 > 0$ 이어야 하므로 $(k+4)(k-4) > 0$
$\therefore k < -4$ 또는 $k > 4$

14. 직선 $y=3x+2$ 와 포물선 $y=x^2+mx+3$ 이 두 점에서 만나기 위한 실수 m 의 범위를 구하면?

① $m<-1, m>3$ ② $m<1, m>5$ ③ $-1<m<3$

④ $-1<m<5$ ⑤ $1<m<5$

해설

$y=3x+2, y=x^2+mx+3$ 에서 y 를 소거하면

$x^2+(m-3)x+1=0, D=(m-3)^2-4>0$

$m^2-6m+5>0, (m-1)(m-5)>0$

$\therefore\ m<1,\ m>5$

15. 이차함수 $y = 2x^2 - 3x + 1$의 그래프와 직선 $y = ax + b$의 두 교점의 x좌표가 각각 1, 5일 때, 상수 a, b의 곱 ab의 값은?

① -81 ② -45 ③ 0 ④ 5 ⑤ 14

해설

이차방정식 $2x^2 - 3x + 1 = ax + b$, 즉 $2x^2 - (3+a)x + 1 - b = 0$의 두 근이 1, 5이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$1 + 5 = \dfrac{3+a}{2}$, $1 \times 5 = \dfrac{1-b}{2}$

$\therefore a = 9,\ b = -9$

$\therefore ab = -81$

16. 계수가 유리수인 이차방정식 $x^2 - ax + b = 0$ 의 한 근이 $2 + \sqrt{3}$ 일 때, ab 의 값은?

① -3 ② 0 ③ 2

④ 4 ⑤ $2 + 2\sqrt{3}$

해설

유리계수이므로 다른 한 근은 $2 - \sqrt{3}$

근과 계수와의 관계에 의해

$a = 4, b = 1$

$\therefore ab = 4$

해설

$x^2 + ax + b = 0$ 에 $x = 2 + \sqrt{3}$ 대입

$(2 + \sqrt{3})^2 - a \cdot (2 + \sqrt{3}) + b = 0$

계수가 유리수이므로

$\sqrt{3} \cdot (4 - a) + (b - 2a + 7) = 0$

$a = 4, b = 1$

$\therefore ab = 4$

17. 이차방정식 $2x^2-6x+1=0$의 두 근을 α,β라 할 때, $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$를 두 근으로 하는 이차방정식은?

① $2x^2-6x+1=0$
② $x^2-6x+1=0$
③ $x^2-7x+3=0$
④ $2x^2+6x-1=0$
⑤ $2x^2-7x+3=0$

해설

근과 계수의 관계에서

$\alpha+\beta=\frac{6}{2}=3$, $\alpha\beta=\frac{1}{2}$ 이므로

3 과 $\frac{1}{2}$ 을 이용한 근과 계수의 관계를 구해보면

$3+\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$, $3\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

$\therefore\ x^2-\frac{7}{2}x+\frac{3}{2}=0$

$\therefore\ 2x^2-7x+3=0$

18. $2x^2+4x-1=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$\alpha+\beta=-2,\ \alpha\beta=-\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ \alpha^2\beta+\alpha\beta^2=\alpha\beta(\alpha+\beta)=-\frac{1}{2}\times(-2)=1$$

19. 이차방정식 $2x^2-4x-3k=0$이 허근을 갖고, 동시에 $x^2+5x-2k=0$이 실근을 갖도록 하는 정수 k의 개수를 구하면?

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

$2x^2-4x-3k=0$이 허근을 가질 조건은

$$\frac{D}{4}=4+6k<0$$

$$\therefore\ k<-\frac{2}{3}\quad \cdots\cdots ㉠$$

$x^2+5x-2k=0$이 실근을 가질 조건은

$$D=25+8k\geq 0$$

$$\therefore\ k\geq -\frac{25}{8}\quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $-\frac{25}{8}\leq k<-\frac{2}{3}$

따라서, 정수 $k=-3,\ -2,\ -1$

$\therefore$ 정수 k의 개수는 3개

20. 이차방정식 $x^2-14kx+96k=0$의 두 근의 비가 $3:4$일 때, 양수 k의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $k=2$

해설

두 근을 $3\alpha,\ 4\alpha$라고 하면
근과 계수의 관계에 의하여
$3\alpha+4\alpha=14k\cdots\cdots$ ㉠
$3\alpha\cdot4\alpha=96k\cdots\cdots$ ㉡
㉠에서 $7\alpha=14k\ \therefore\alpha=2k\cdots\cdots$ ㉢
㉡에서 $12\alpha^2=96k\ \therefore\alpha^2=8k\cdots\cdots$ ㉣
㉢을 ㉣에 대입하면 $4k^2=8k,\ 4k(k-2)=0$
$\therefore k=0$ 또는 $k=2$
따라서 양수 k의 값은 $k=2$이다.