

1. 두 점 A(2, 3), B(-1, -3)에 대하여 1 : 2 로 내분하는 점 P 의 좌표는?

① P(1, 1)

② P(-1, 1)

③ P(1, -1)

④ P(1, 0)

⑤ P(-1, -1)

해설

P(x_1 , y_1)라 하면,

$$x_1 = \frac{1 \cdot (-1) + 2 \cdot 2}{1 + 2} = 1,$$

$$y_1 = \frac{1 \cdot (-3) + 2 \cdot 3}{1 + 2} = 1$$

$\therefore$ P(1, 1)

2. 두 점 $A(3, 2), B(1, 4)$ 를 연결하는 선분의 중점을 지나고 $2x + y - 1 = 0$ 에 수직인 직선을 l 이라 할 때, 다음 중 직선 l 위에 있는 점은?

① $\left(-4, \frac{1}{2}\right)$

② $\left(-6, -\frac{3}{2}\right)$

③ $(0, 2)$

④ $(1, 1)$

⑤ $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$

해설

두 점 $A(3, 2), B(1, 4)$ 의 중점 M 의 좌표는 $(2, 3)$ 이고, 직선 $2x + y - 1 = 0$ 에 수직인

직선의 기울기 m 은 $(-2) \cdot m = -1$ 에서 $m = \frac{1}{2}$

이 때, 구하는 직선 l 의 방정식은

$$y = \frac{1}{2}(x - 2) + 3 \quad \therefore y = \frac{1}{2}x + 2$$

따라서, 이 직선 위의 점은 $(0, 2)$ 이다

3. 직선 $y = mx - m + 2$ 는 m 의 값에 관계없이 항상 일정한 점을 지난다.
그 점의 좌표를 (a, b) 라 할 때 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

m 에 관해서 정리하면

$(x - 1)m + 2 - y = 0$ 이므로 이것은

m 의 값에 관계없이 두 직선

$x - 1 = 0, 2 - y = 0$ 의 교점을 지난다.

$x - 1 = 0$ 에서 $x = 1$, $2 - y = 0$ 에서 $y = 2$

따라서 교점은 $(1, 2)$ 이다.

「 $y = mx - m + 2 \Leftrightarrow y - 2 = m(x - 1)$ 」 이므로

공식 $y - y_1 = m(x - x_1)$ 과 비교해 보면

$(x_1, y_1) = (1, 2)$ 임을 알 수 있다.

$\therefore a + b = 3$

4. 좌표평면 위의 점 $(1, 2)$ 와 직선 $x + 2y = 0$ 사이의 거리는?

- ① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $\sqrt{5}$ ⑤ 5

해설

점 $(1, 2)$ 와 직선 $x + 2y = 0$ 사이의 거리 d 는

$$\therefore d = \frac{|1 \cdot 1 + 2 \cdot 2|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \sqrt{5}$$

5. 두 직선 $4x - 3y - 4 = 0$, $4x - 3y - 2 = 0$ 사이의 거리를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{2}{5}$

해설

$4x - 3y - 4 = 0$ 의 x 절편 $(1, 0)$ 에서
 $4x - 3y - 2 = 0$ 까지의 거리는

$$d = \frac{|4 - 2|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{2}{5}$$

6. 평행이동 $T : (x, y) \rightarrow (x + 4, y - 3)$ 에 의하여 점 $(2, 5)$ 가 옮겨지는 점의 좌표를 구하면?

① $(2, 1)$ ② $(4, 6)$ ③ $(6, 2)$ ④ $(5, 3)$ ⑤ $(9, 1)$

해설

평행이동 T 로부터 얻어지는 관계식

$$\begin{cases} x' = x + 4 \\ y' = y - 3 \end{cases}$$

에 주어진 점의 좌표를 대입하여 구하면 된다.

$(2 + 4, 5 - 3)$, 즉 $(6, 2)$

7. 좌표평면 위의 두 점 $P(a, 3)$, $Q(1, a)$ 에 대하여 $\overline{PQ} = \sqrt{2}$ 일 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$\overline{PQ} = \sqrt{(1-a)^2 + (a-3)^2} = \sqrt{2a^2 - 8a + 10}$$

$$\overline{PQ} = \sqrt{2} \text{ 이므로 } \sqrt{2a^2 - 8a + 10} = \sqrt{2}$$

$$\text{양변을 제곱하면 } 2a^2 - 8a + 10 = 2$$

$$2a^2 - 8a + 8 = 0, a^2 - 4a + 4 = 0, (a-2)^2 = 0$$

$$\therefore a = 2$$

8. 좌표평면 위의 두 점 A(3,2) , B(5,4) 와 x 축 위를 움직이는 점 P 에 대하여 PA + PB 의 최솟값은?

- ① 6
- ② $\sqrt{37}$
- ③ $\sqrt{38}$
- ④ $\sqrt{39}$
- ⑤ $\sqrt{40}$

해설

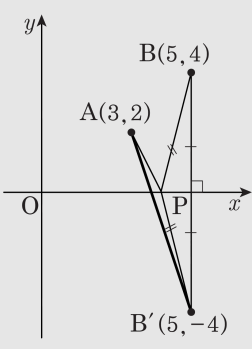
다음 그림과 같이 점 B(5, 4) 를 x 축에 대하여 대칭이동한 점을 B'(5, -4) 라 하면

$\overline{PB} = \overline{PB'}$ 이므로

$\overline{PA} + \overline{PB} = \overline{PA} + \overline{PB'} \geq \overline{AB'}$

따라서 $\overline{PA} + \overline{PB}$ 의 최솟값은 $\overline{AB'}$ 이고

$\overline{AB'} = \sqrt{(5-3)^2 + (-4-2)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$



9. 삼각형 ABC의 세 꼭짓점의 좌표가 A (1, 1), B (2, 4), C(6, 3)이고 선분 AB를 2 : 1로 외분하는 점을 D라 하자. 삼각형 BCD의 무게중심의 좌표가 (x, y)일 때, $x - y$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

두 점 A(1, 1), B(2, 4)이므로

점 D의 좌표를 (a, b)라 하면

$$a = \frac{2 \cdot 2 - 1 \cdot 1}{2 - 1} = 3, b = \frac{2 \cdot 4 - 1 \cdot 1}{2 - 1} = 7$$

따라서 D(3, 7)이므로

삼각형 BCD의 무게중심의 좌표 (x, y)는

$$x = \frac{2 + 6 + 3}{3} = \frac{11}{3}, y = \frac{4 + 3 + 7}{3} = \frac{14}{3}$$

$$\therefore x - y = \frac{11}{3} - \frac{14}{3} = -1$$

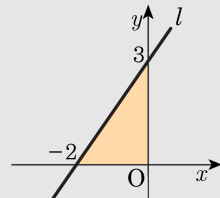
10. 직선 $3x - 2y + 6 = 0$ 이 x 축 및 y 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$3x - 2y + 6 = 0$ 을 그래프에 도시해보면,



$\therefore$ 빗금 친 부분의 넓이 : $\frac{1}{2} \times 2 \times 3 = 3$

11. 두 점 A(3, 2), B(a, b)를 지나는 직선이 직선 $x + 2y - 3 = 0$ 과 직교하고, 그 교점은 선분 AB를 2 : 1로 내분한다. 이때, $3a + b$ 의 값은?

- ① 3 ② 5 ③ 7 ④ 9 ⑤ 10

해설

직선 AB의 기울기는 2이므로
 $\frac{b-2}{a-3} = 2$
 $b-2 = 2(a-3), b = 2a-4 \dots\dots\textcircled{1}$
 $\overline{AB}$ 를 2 : 1로 내분하는 점은
 $\left(\frac{2a+1 \cdot 3}{2+1}, \frac{2b+1 \cdot 2}{2+1}\right) = \left(\frac{2a+3}{3}, \frac{2b+2}{3}\right)$ 이고,
이 점은 직선 $x + 2y - 3 = 0$ 위에 있으므로
 $\frac{2a+3}{3} + 2 \frac{2b+2}{3} - 3 = 0,$
 $a + 2b - 1 = 0 \dots\dots\textcircled{2}$
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면
 $a = \frac{9}{5}, b = -\frac{2}{5}$
 $\therefore 3a + b = 5$

12. 두 직선 $x + y - 4 = 0$, $2x - y + 1 = 0$ 의 교점과 점 $(2, -1)$ 을 지나는 직선의 방정식을 구하면 $y = ax + b$ 이다. ab 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $ab = -28$

해설

$$\begin{cases} x + y - 4 = 0 \\ 2x - y + 1 = 0 \end{cases} \text{ 을 연립하면}$$

교점 : $(1, 3) \Rightarrow (1, 3), (2, -1)$ 을 지나는 직선

$$y = \frac{-1 - 3}{2 - 1}(x - 1) + 3$$

$$\Rightarrow y = -4x + 7$$

$$\therefore a = -4, b = 7$$

$$\therefore ab = -28$$

13. x, y 에 대한 이차방정식 $x^2 + y^2 - 2kx + 2ky + 3k^2 - 4k + 2 = 0$ 이
반지름의 길이가 1 인 원의 방정식일 때, 상수 k 값의 합을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

주어진 방정식을 변형하면

$$(x - k)^2 + (y + k)^2 = -k^2 + 4k - 2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

반지름의 길이가 1 이므로

$$\textcircled{1} \text{에서 } -k^2 + 4k - 2 = 1 \leftarrow r^2 = 1$$

$$k^2 - 4k + 3 = 0, (k - 1)(k - 3) = 0$$

$$\therefore k = 1 \text{ 또는 } k = 3$$

따라서 합은 4이다.

14. 이차방정식 $x^2 - ay^2 - 4x + 2y + k = 0$ 이 원을 나타낼 때 두 괄호에 들어갈 알맞은 값의 합을 구하여라.

$a = (\quad \quad \quad), k < (\quad \quad \quad)$

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

원의 방정식이 되기 위해서는 x^2 의 계수와 y^2 의 계수가 같아야 하므로 $a = -1$
또한, 준식을 표준형으로 나타내면,
 $x^2 - 4x + y^2 + 2y + k = 0$ 에서
 $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 5 - k$
여기서, $5 - k > 0$ 이어야 하므로 $k < 5$

15. 원 $x^2 + y^2 = 13$ 위의 점 $(2, 3)$ 에서의 접선의 방정식을 구하면?

① $2x + 3y + 13 = 0$

② $2x + 3y - 13 = 0$

③ $3x + 2y + 13 = 0$

④ $3x + 2y - 13 = 0$

⑤ $3x - 2y - 13 = 0$

해설

$(2, 3)$ 이 원 위의 점이므로

$$2 \cdot x + 3 \cdot y = 13$$

$$\therefore 2x + 3y - 13 = 0$$

16. 원 $x^2 + y^2 = r^2$ 을 x 축의 방향으로 2, y 축의 방향으로 3 만큼 평행이동한 원의 방정식을 구하여라.

① $(x+2)^2 + (y+1)^2 = r^2$

② $(x-1)^2 + (y+2)^2 = r^2$

③ $(x+2)^2 + (y-1)^2 = r^2$

④ $(x-2)^2 + (y-3)^2 = r^2$

⑤ $(x+2)^2 + (y+3)^2 = r^2$

해설

원 $x^2 + y^2 = r^2 \dots$ ①

위의 임의의 점 $P(x, y)$ 를 x 축의 방향으로 2, y 축의 방향으로 3 만큼 평행이동한 점을 $P(x', y')$ 이라 하면

$$\begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x' - 2 \\ y = y' - 3 \end{cases} \dots \text{②}$$

②를 ①에 대입하면 $(x' - 2)^2 + (y' - 3)^2 = r^2$

점 $P(x', y')$ 는 평행이동한 원 위의 임의의 점이므로 구하는 방정식은 $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = r^2$ 이다.

17. 두 점 A(2, 3), B(6, 1)이 있다. 점 P가 x 축 위에 있을 때, $\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 최솟값을 구하면?

① 4 ② $4\sqrt{2}$ ③ $2\sqrt{3}$ ④ $3\sqrt{3}$ ⑤ $4\sqrt{3}$

해설

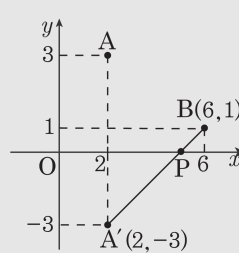
(2, 3)을 x 축에 대해

대칭이동한 점을

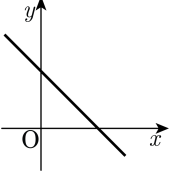
A'(2, -3)라 하면

최단거리는 $\overline{A'B}$ 의 길이

$$\therefore \sqrt{(2-6)^2 + (-3-1)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$



18. 직선 $ax + by + c = 0$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때 $cx + by + a = 0$ 의 그래프가 지나지 않는 사분면은?



- ① 제 1 사분면
- ② 제 2 사분면
- ③ 제 3 사분면
- ④ 제 4 사분면
- ⑤ 제 1, 3 사분면

해설

직선 $ax + by + c = 0$ 은

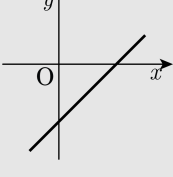
$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ 이므로

$-\frac{a}{b} < 0, -\frac{c}{b} > 0$ 이다.

구하는 직선은 $y = -\frac{c}{b}x - \frac{a}{b}$ 이므로

그래프는 다음과 같다.

따라서 지나지 않는 사분면은 제2 사분면이다.



19. 점 $(3, 4)$ 에서 직선 $2x - y + k = 0$ 까지의 거리가 $\sqrt{5}$ 일 때, 양수 k 의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$\frac{|2 \times 3 - 4 + k|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \sqrt{5} \text{ 이므로, } |2 + k| = 5 \text{ 이다.}$$

따라서 $k = 3$ ($\because k$ 는 양수)

20. 두 직선 $3x+2y-1=0$ 과 $2x-3y+1=0$ 으로부터 같은 거리에 있는 점들 중 x 와 y 의 좌표가 모두 정수인 점에 대한 다음 설명 중 옳은 것만을 골라 놓은 것은?

- I. 위 조건을 만족하는 점은 유한개이다.
II. 제2사분면의 점들 중에서 위 조건을 만족하는 것이 없다.
III. 제3사분면에 있는 모든 점들의 y 좌표는 5의 배수이다.

- ① I ② II ③ III ④ I, III ⑤ II, III

해설

두 직선에서 같은 거리에 있는 점을 $P(a, b)$ 라고 하면
$$\frac{|3a+2b-1|}{\sqrt{13}} = \frac{|2a-3b+1|}{\sqrt{13}}$$
 $3a+2b-1=2a-3b+1$ 또는 $3a+2b-1=-2a+3b-1$ 이므로
 $a+5b-2=0, 5a-b=0$ 에서
 $x+5y-2=0, 5x-y=0$
즉, $y=-\frac{1}{5}x+\frac{2}{5}$ 와
 $y=5x$ 위에 있는 모든 점들은
주어진 두 직선에서 이르는 거리가 같다.
I. 이러한 좌표는 무한개 존재한다.
II. $y=-\frac{1}{5}x+\frac{2}{5}$
위의 점, 예를 들면 $(-3, 1)$ 이 있다.
III. $y=5x$ 로 x 가 정수일 때,
 y 좌표는 5의 배수이다.

21. 세 점 P(-2, -4), Q(1, 5), R(5, 3) 을 지나는 원의 중심의 좌표는 (a, b) 이고, 반지름의 길이는 r 이다. 이 때, $a + b + r$ 의 값을 구하면?

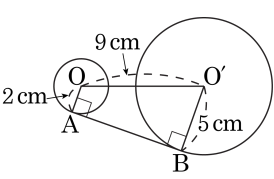
- ① 5
- ② 6
- ③ 7
- ④ 8
- ⑤ 9

해설

P(-2, -4), Q(1, 5), R(5, 3)
 $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$
$$\begin{cases} (-2 - a)^2 + (-4 - b)^2 = r^2 \cdots \textcircled{㉠} \\ (1 - a)^2 + (5 - b)^2 = r^2 \cdots \textcircled{㉡} \\ (5 - a)^2 + (3 - b)^2 = r^2 \cdots \textcircled{㉢} \end{cases}$$

㉠, ㉡ 식 연립 :
 $a + 3b = 1 \cdots \textcircled{㉤}$
㉡, ㉢ 식 연립 :
 $2a - b = 2 \cdots \textcircled{㉥}$
㉤, ㉥ 식 연립 :
 $a + b = 1 \cdots \textcircled{㉦}$
㉤, ㉦ 연립하면 $b = 0, a = 1$
㉠ 식에 $(-2 - 1)^2 + (-4 - 0)^2 = r^2$
 $\therefore r^2 = 25$
 $\therefore r = 5$
 $a + b + r = 1 + 0 + 5 = 6$

22. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 각각 2 cm, 5 cm 인 두 원 O, O' 의 중심 사이의 거리가 9 cm 일 때, 공통외접선 $\overline{AB}$ 의 길이는?



- ① $6\sqrt{2}$ cm ② 8 cm ③ $5\sqrt{2}$ cm
 ④ 7 cm ⑤ $4\sqrt{3}$ cm

해설

다음 그림에서 점 O에서 $\overline{BO'}$ 에 내린 수선의 발을 H 라 하면

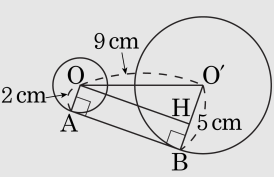
$$\overline{AO} = \overline{BH}$$

$$\therefore \overline{O'H} = 5 - 2 = 3$$

따라서 $\triangle OHO'$ 에서

피타고라스의 정리에 의하여

$$\overline{AB} = \overline{OH} = \sqrt{9^2 - 3^2} = 6\sqrt{2} \text{ cm}$$



23. 직선 $y = x + n$ 과 원 $x^2 + y^2 = 8$ 이 만나지 않도록 하는 자연수 n 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

점 $(0, 0)$ 에서 직선 $y = x + n$ 까지의 거리가
반지름의 길이 $2\sqrt{2}$ 보다 크면 된다.

$$\frac{|n|}{\sqrt{2}} > 2\sqrt{2}$$

$\therefore n > 4$ ($\because n$ 은 자연수)

$\therefore$ 최소의 n 은 5이다.

24. 포물선 $y = x^2$ 을 점 P 에 대하여 대칭이동 시켰더니 포물선 $y = -x^2 + 4x - 2$ 가 되었다. 이 때 점 P 의 좌표는?

㉠ (1, 1)

㉡ (1, 2)

㉢ (-1, 1)

㉣ (-1, -1)

㉤ (1, -1)

해설

두 포물선이 한 점에 대하여 서로 대칭이면

두 포물선의 꼭지점도 이 점에 대하여 서로 대칭이다.

포물선 $y = x^2$ 의 꼭지점의 좌표는 O(0, 0) 이고

포물선 $y = -x^2 + 4x - 2$ 의 꼭지점의 좌표는 A(2, 2) 이다.

이 때, 점 P 는 선분 OA 의 중점이므로 P 의 좌표는 P(1, 1) 이다.

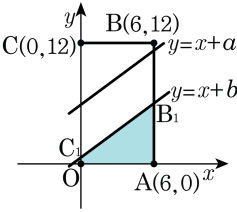
25. 네 점 $A(-2, 3)$, $B(3, a)$, $C(b, 4)$, $D(2, 8)$ 을 꼭짓점으로 하는 $\square ABCD$ 가 마름모가 되도록 하는 a, b 의 합을 구하면?

- ① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

$\square ABCD$ 가 마름모이므로
 $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$, $\overline{AD} = \overline{BC}$ 이다.
따라서 점 D는 점 A를 x 축 방향으로 4만큼
 y 축 방향으로 5만큼 평행이동한 것이므로
점 C도 점 B를 x 축 방향으로 4만큼
 y 축 방향으로 5만큼 평행이동한 것이다.
 $\therefore (3 + 4, a + 5) = (b, 4)$
 $\therefore a = -1, b = 7$
 $\therefore a + b = 6$

26. 네 점 $O(0,0)$, $A(6,0)$, $B(6,12)$, $C(0,12)$ 를 꼭지점으로 하는 사각형 $OABC$ 가 있다. 그림과 같이 두 직선 $y = x + a$, $y = x + b$ 가 사각형 $OABC$ 의 넓이를 삼등분할 때, ab 의 값은?



- ① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

사각형 $OABC$ 의 넓이가 72이므로
사각형 OAB_1C_1 의 넓이는 24이다.
 $\frac{1}{2}(b + 6 + b) \times 6 = 24$ 이므로 $b = 1$
같은 방법으로 $a = 5$
 $\therefore ab = 5$

27. 두 점 A(-4, 2), B(2, -1)로 부터의 거리의 비가 2 : 1 인 점이 나타내는 원의 중심과 직선 $y = 3x - 4$ 의 거리는?

- ① $\sqrt{2}$
- ② 2
- ③ $\sqrt{6}$
- ④ $2\sqrt{2}$
- ⑤ $\sqrt{10}$

해설

$$\overline{AP} : \overline{BP} = 2 : 1$$
$$2\overline{BP} = \overline{AP}$$
$$4\overline{BP}^2 = \overline{AP}^2$$
$$4 \cdot \{(x-2)^2 + (y+1)^2\} = (x+4)^2 + (y-2)^2$$
$$3x^2 + 3y^2 - 24x + 12y = 0$$
$$(x-4)^2 + (y+2)^2 = 20$$

원의 중심 (4, -2)와 직선 $3x - y - 4 = 0$ 간의 거리

$$\therefore \frac{|12 + 2 - 4|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$$

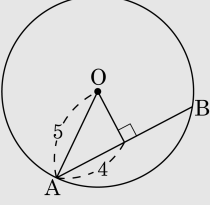
28. $y = x + k$ 가 원 $x^2 + y^2 + 6y - 16 = 0$ 에 의해서 잘린 현의 길이가 8 일 때, 상수 k 값의 합은 ?

- ① 6
- ② 9
- ③ -6
- ④ -9
- ⑤ 4

해설

$$\begin{cases} y = x + k \cdots \textcircled{1} \\ x^2 + (y + 3)^2 = 25 \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

①, ②의 교점을 A, B 라 하면
 $\overline{AB} = 8$, $\overline{OA} = 5$ 이므로
점 O 에서 ①에 이르는 거리는 3 이다.


$$\frac{|3 + k|}{\sqrt{1 + 1}} = 3, \quad k^2 + 6k - 9 = 0$$

k 값의 합 $\Rightarrow -6$

29. 점 (1, 4) 를 지나는 직선을 원점에 대하여 대칭이동한 직선이 점 (2, 5) 를 지날 때, 처음 직선의 기울기는?

① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

원점에 대하여 대칭이동한 직선이 점 (2, 5) 를 지나므로 처음 직선은 점 (-2, -5) 를 지난다.

따라서 처음 직선은 두 점 (1, 4), (-2, -5) 를

지나므로 구하는 기울기는 $\frac{4 - (-5)}{1 - (-2)} = 3$

30. 원 $O : x^2 + (y - 1)^2 = 1$ 을 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 원을 O' 이라고 하자. 두 원 O, O' 의 교점을 각각 A, B 라 할 때, 점 $(6, 2)$ 를 직선 AB 에 대하여 대칭이동한 점이 (a, b) 이다. 이 때, ab 의 값을 구하면?

- ① -8
- ② -12
- ③ 8
- ④ 12
- ⑤ 0

해설

원 $O : x^2 + (y - 1)^2 = 1$ 을 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동하면

$O' : (x + 1)^2 + y^2 = 1$

두 원의 방정식을 일반형으로 변형하면

$O : x^2 + y^2 - 2y = 0, O' : x^2 + y^2 + 2x = 0$

이 때, 직선 AB 의 방정식은 $2x + 2y = 0$,

즉 $y = -x$

따라서 점 $(6, 2)$ 를 직선 $y = -x$ 에 대하여

대칭이동한 점은 $(-2, -6)$ 이므로

$a = -2, b = -6 \therefore ab = 12$