1. 두 점 $A(2,\ 3)$, $B(-1,\ -3)$에 대하여 $1:2$로 내분하는 점 P의 좌표는?

① $P(1,\ 1)$ ② $P(-1,\ 1)$ ③ $P(1,\ -1)$
④ $P(1,\ 0)$ ⑤ $P(-1,\ -1)$

해설

$P(x_1,\ y_1)$라 하면,

$$x_1=\frac{1\cdot(-1)+2\cdot 2}{1+2}=1,$$

$$y_1=\frac{1\cdot(-3)+2\cdot 3}{1+2}=1$$

$\therefore\ P(1,\ 1)$

2. 두 점 $A(3,2), B(1,4)$ 를 연결하는 선분의 중점을 지나고 $2x+y-1=0$ 에 수직인 직선을 l 이라 할 때, 다음 중 직선 l 위에 있는 점은?

① $\left(-4, \frac{1}{2}\right)$ ② $\left(-6, -\frac{3}{2}\right)$ ③ $(0,2)$
④ $(1,1)$ ⑤ $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$

해설

두 점 $A(3,2), B(1,4)$ 의 중점 M 의 좌표는
$(2,3)$ 이고, 직선$2x+y-1=0$ 에 수직인
직선의 기울기 m 은 $(-2)\cdot m=-1$에서$m=\frac{1}{2}$
이 때, 구하는 직선 l 의 방정식은
$y=\frac{1}{2}(x-2)+3 \quad \therefore y=\frac{1}{2}x+2$
따라서, 이 직선 위의 점은 $(0,2)$ 이다

3. 직선 $y=mx-m+2$ 는 m의 값에 관계없이 항상 일정한 점을 지난다. 그 점의 좌표를 $(a,\ b)$ 라 할 때 $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

m 에 관해서 정리하면

$(x-1)m+2-y=0$ 이므로 이것은

m 의 값에 관계없이 두 직선

$x-1=0,\ 2-y=0$ 의 교점을 지난다.

$x-1=0$ 에서 $x=1$, $2-y=0$ 에서 $y=2$

따라서 교점은 $(1,2)$ 이다.

「$y=mx-m+2 \ \Leftrightarrow\ y-2=m(x-1)$」 이므로

공식 $y-y_1=m(x-x_1)$ 과 비교해 보면

$(x_1,\ y_1)=(1,\ 2)$ 임을 알 수 있다.

$\therefore a+b=3$

4. 좌표평면 위의 점 $(1,\ 2)$ 와 직선 $x+2y=0$ 사이의 거리는?

① 1　　② $\sqrt{2}$　　③ 2　　④ $\sqrt{5}$　　⑤ 5

해설

점 $(1,2)$ 와 직선 $x+2y=0$ 사이의 거리 d 는

$$\therefore\ d=\frac{|1\cdot 1+2\cdot 2|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\sqrt{5}$$

5. 두 직선 $4x-3y-4=0$, $4x-3y-2=0$ 사이의 거리를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{2}{5}$

해설

$4x-3y-4=0$ 의 x 절편 $(1,0)$ 에서

$4x-3y-2=0$ 까지의 거리는

$$d=\frac{|4-2|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{2}{5}$$

6. 평행이동 $T : (x, y) \to (x+4, y-3)$ 에 의하여 점 $(2, 5)$ 가 옮겨지는 점의 좌표를 구하면?

① (2, 1) ② (4, 6) ③ (6, 2) ④ (5, 3) ⑤ (9, 1)

해설

평행이동 T 로부터 얻어지는 관계식

$$\begin{cases} x' = x + 4 \\ y' = y - 3 \end{cases}$$

에 주어진 점의 좌표를 대입하여 구하면 된다.

$(2+4, 5-3)$, 즉 $(6, 2)$

7. 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{P}(a,\ 3)$, $\mathrm{Q}(1,\ a)$에 대하여 $\overline{\mathrm{PQ}} = \sqrt{2}$ 일 때, a의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$\overline{\mathrm{PQ}} = \sqrt{(1-a)^2 + (a-3)^2} = \sqrt{2a^2 - 8a + 10}$

$\overline{\mathrm{PQ}} = \sqrt{2}$이므로 $\sqrt{2a^2 - 8a + 10} = \sqrt{2}$

양변을 제곱하면 $2a^2 - 8a + 10 = 2$

$2a^2 - 8a + 8 = 0,\ a^2 - 4a + 4 = 0$, $(a-2)^2 = 0$

$\therefore\ a = 2$

8. 좌표평면 위의 두 점 $A(3,2)$, $B(5,4)$ 와 x 축 위를 움직이는 점 P 에 대하여 $\overline{PA}+\overline{PB}$ 의 최솟값은?

① 6　　② $\sqrt{37}$　　③ $\sqrt{38}$　　④ $\sqrt{39}$　　⑤ $\sqrt{40}$

해설

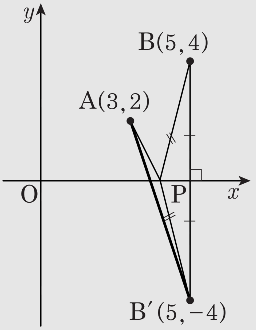
다음 그림과 같이 점 $B(5,\ 4)$ 를 x 축에 대하여 대칭이동한 점을 $B'(5,-4)$ 라 하면

$\overline{PB}=\overline{PB'}$ 이므로

$\overline{PA}+\overline{PB}=\overline{PA}+\overline{PB'}\geq\overline{AB'}$

따라서 $\overline{PA}+\overline{PB}$ 의 최솟값은 $\overline{AB'}$ 이고

$\overline{AB'}=\sqrt{(5-3)^2+(-4-2)^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$



9. 삼각형 ABC의 세 꼭짓점의 좌표가 A$(1,\ 1)$, B$(2,\ 4)$, C$(6,\ 3)$이고 선분 AB를 $2:1$로 외분하는 점을 D라 하자. 삼각형 BCD의 무게중심의 좌표가 $(x,\ y)$일 때, $x-y$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

두 점 A$(1,\ 1)$, B$(2,\ 4)$이므로
점 D의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면

$$a=\frac{2\cdot 2-1\cdot 1}{2-1}=3,\ b=\frac{2\cdot 4-1\cdot 1}{2-1}=7$$

따라서 D$(3,\ 7)$이므로
삼각형 BCD의 무게중심의 좌표 $(x,\ y)$는

$$x=\frac{2+6+3}{3}=\frac{11}{3},\ y=\frac{4+3+7}{3}=\frac{14}{3}$$

$$\therefore x-y=\frac{11}{3}-\frac{14}{3}=-1$$

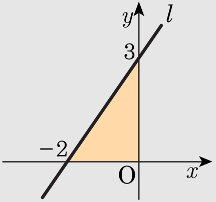
10. 직선 $3x-2y+6=0$이 x 축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$3x-2y+6=0$을 그래프에 도시해보면,



$\therefore$ 빗금 친 부분의 넓이 : $\frac{1}{2}\times 2\times 3=3$

11. 두 점 $A(3, 2)$, $B(a, b)$를 지나는 직선이 직선 $x+2y-3=0$과 직교하고, 그 교점은 선분 AB를 $2:1$로 내분한다. 이때, $3a+b$의 값은?

① 3　② 5　③ 7　④ 9　⑤ 10

해설

직선 AB의 기울기는 2이므로

$$\frac{b-2}{a-3}=2$$

$b-2=2(a-3)$, $b=2a-4 \cdots\cdots$ ㉠

$\overline{AB}$를 $2:1$로 내분하는 점은

$$\left(\frac{2a+1\cdot 3}{2+1}, \frac{2b+1\cdot 2}{2+1}\right)=\left(\frac{2a+3}{3}, \frac{2b+2}{3}\right)$$ 이고,

이 점은 직선 $x+2y-3=0$ 위에 있으므로

$$\frac{2a+3}{3}+2\frac{2b+2}{3}-3=0,$$

$a+2b-1=0 \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=\frac{9}{5},\ b=-\frac{2}{5}$$

$\therefore\ 3a+b=5$

12. 두 직선 $x+y-4=0$, $2x-y+1=0$의 교점과 점 $(2,-1)$을 지나는 직선의 방정식을 구하면 $y=ax+b$이다. ab의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $ab=-28$

해설

$$\begin{cases} x+y-4=0 \\ 2x-y+1=0 \end{cases}$$ 을 연립하면

교점 : $(1,3) \Rightarrow$ $(1,3),(2,-1)$을 지나는 직선

$$y=\frac{-1-3}{2-1}(x-1)+3$$

$\Rightarrow$ $y=-4x+7$

$\therefore a=-4,\ b=7$

$\therefore$ $ab=-28$

13. x, y 에 대한 이차방정식 $x^2 + y^2 - 2kx + 2ky + 3k^2 - 4k + 2 = 0$ 이 반지름의 길이가 1 인 원의 방정식일 때, 상수 k 값의 합을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

주어진 방정식을 변형하면

$(x-k)^2 + (y+k)^2 = -k^2 + 4k - 2 \quad \cdots$ ㉠

반지름의 길이가 1 이므로

㉠에서 $-k^2 + 4k - 2 = 1 \leftarrow r^2 = 1$

$k^2 - 4k + 3 = 0, (k-1)(k-3) = 0$

$\therefore k = 1$ 또는 $k = 3$

따라서 합은 4이다.

14. 이차방정식 $x^2 - ay^2 - 4x + 2y + k = 0$ 이 원을 나타낼 때 두 괄호에 들어갈 알맞은 값의 합을 구하여라.

$a = (\qquad\quad), k < (\qquad\quad)$

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

원의 방정식이 되기 위해서는 x^2 의 계수와 y^2 의 계수가 같아야 하므로 $a = -1$

또한, 준식을 표준형으로 나타내면,

$x^2 - 4x + y^2 + 2y + k = 0$ 에서

$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 5 - k$

여기서, $5 - k > 0$ 이어야 하므로 $k < 5$

15. 원 $x^2 + y^2 = 13$ 위의 점 $(2,\ 3)$ 에서의 접선의 방정식을 구하면?

① $2x + 3y + 13 = 0$

② $2x + 3y - 13 = 0$

③ $3x + 2y + 13 = 0$

④ $3x + 2y - 13 = 0$

⑤ $3x - 2y - 13 = 0$

해설

$(2,\ 3)$ 이 원 위의 점이므로

$2 \cdot x + 3 \cdot y = 13$

$\therefore 2x + 3y - 13 = 0$

16. 원 $x^2+y^2=r^2$ 을 x 축의 방향으로 2 , y 축의 방향으로 3 만큼 평행이동한 원의 방정식을 구하여라.

① $(x+2)^2+(y+1)^2=r^2$
② $(x-1)^2+(y+2)^2=r^2$
③ $(x+2)^2+(y-1)^2=r^2$
④ $(x-2)^2+(y-3)^2=r^2$
⑤ $(x+2)^2+(y+3)^2=r^2$

해설

원 $x^2+y^2=r^2 \cdots$ ①
위의 임의의 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$를 x축의 방향으로 2, y 축의 방향으로 3 만큼 평행이동한 점을 $\mathrm{P}(x',\ y')$이라 하면

$$\begin{cases} x'=x+2 \\ y'=y+3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=x'-2 \\ y=y'-3 \end{cases} \quad \cdots ②$$

②를 ①에 대입하면 $(x'-2)^2+(y'-3)^2=r^2$
점 $\mathrm{P}(x',\ y')$는 평행이동한 원 위의 임의의 점이므로
구하는 방정식은 $(x-2)^2+(y-3)^2=r^2$ 이다.

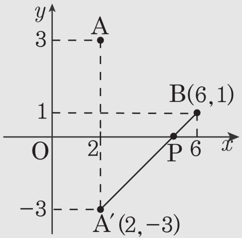
17. 두 점 A(2, 3), B(6, 1)이 있다. 점 P가 x축 위에 있을 때, $\overline{AP}+\overline{BP}$의 최솟값을 구하면?

① 4　② $4\sqrt{2}$　③ $2\sqrt{3}$　④ $3\sqrt{3}$　⑤ $4\sqrt{3}$

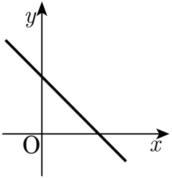
해설

(2, 3)을 x축에 대해 대칭이동한 점을 A′(2, −3)라 하면 최단거리는 $\overline{A'B}$의 길이

$\therefore \sqrt{(2-6)^2+(-3-1)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$



18. 직선 $ax+by+c=0$의 그래프가 다음 그림과 같을 때 $cx+by+a=0$의 그래프가 지나지 않는 사분면은?



① 제 1 사분면 ② 제 2 사분면

③ 제 3 사분면 ④ 제 4 사분면

⑤ 제 1, 3 사분면

해설

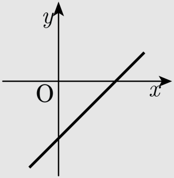
직선 $ax+by+c=0$은

$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$ 이므로

$-\frac{a}{b}<0$, $-\frac{c}{b}>0$ 이다.

구하는 직선은 $y=-\frac{c}{b}x-\frac{a}{b}$ 이므로

그래프는 다음과 같다.



따라서 지나지 않는 사분면은 제2 사분면이다.

19. 점 (3, 4) 에서 직선 $2x - y + k = 0$ 까지의 거리가 $\sqrt{5}$ 일 때, 양수 k 의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$\dfrac{|2 \times 3 - 4 + k|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \sqrt{5}$ 이므로, $|2 + k| = 5$ 이다.

따라서 $k = 3$ ($\because$ k 는 양수)

20. 두 직선 $3x+2y-1=0$ 과 $2x-3y+1=0$ 으로부터 같은 거리에 있는 점들 중 x 와 y 의 좌표가 모두 정수인 점에 대한 다음 설명 중 옳은 것만을 골라 놓은 것은?

Ⅰ. 위 조건을 만족하는 점은 유한개이다. Ⅱ. 제2사분면의 점들 중에서 위 조건을 만족하는 것이 없다. Ⅲ. 제3사분면에 있는 모든 점들의 y좌표는 5의 배수이다.

① Ⅰ　② Ⅱ　③ Ⅲ　④ Ⅰ, Ⅲ　⑤ Ⅱ, Ⅲ

해설

두 직선에서 같은 거리에 있는 점을

P$(a,\ b)$ 라고 하면

$$\frac{|3a+2b-1|}{\sqrt{13}}=\frac{|2a-3b+1|}{\sqrt{13}}$$

$3a+2b-1=2a-3b+1$ 또는

$3a+2b-1=-2a+3b-1$ 이므로

$a+5b-2=0,\ 5a-b=0$ 에서

$x+5y-2=0$, $5x-y=0$

즉, $y=-\frac{1}{5}x+\frac{2}{5}$ 와

$y=5x$ 위에 있는 모든 점들은

주어진 두 직선에서 이르는 거리가 같다.

Ⅰ. 이러한 좌표는 무한개 존재한다.

Ⅱ. $y=-\frac{1}{5}x+\frac{2}{5}$

위의 점, 예를 들면 $(-3,\ 1)$ 이 있다.

Ⅲ. $y=5x$ 로 x 가 정수일 때,

y 좌표는 5 의 배수이다.

21. 세 점 $P(-2, -4)$, $Q(1, 5)$, $R(5, 3)$ 을 지나는 원의중심의 좌표는 (a, b) 이고, 반지름의 길이는 r 이다. 이 때, $a+b+r$ 의 값을 구하면?

① 5　② 6　③ 7　④ 8　⑤ 9

해설

$P(-2, -4)$, $Q(1, 5)$, $R(5, 3)$

$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

$$\begin{cases}(-2-a)^2+(-4-b)^2=r^2 & \cdots ㉠\\(1-a)^2+(5-b)^2=r^2 & \cdots ㉡\\(5-a)^2+(3-b)^2=r^2 & \cdots ㉢\end{cases}$$

㉠, ㉡식 연립 :

$a+3b=1 \cdots$ ㉣

㉡, ㉢식 연립 :

$2a-b=2 \cdots$ ㉤

㉢, ㉠식 연립 :

$a+b=1 \cdots$ ㉥

㉣, ㉥ 연립하면 $b=0$, $a=1$

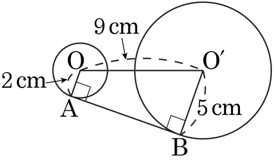
㉠식에 $(-2-1)^2+(-4-0)^2=r^2$

$\therefore\ r^2=25$

$\therefore\ r=5$

$a+b+r=1+0+5=6$

22. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 각각 2 cm, 5 cm 인 두 원 O, O′ 의 중심 사이의 거리가 9 cm 일 때, 공통외접선 $\overline{AB}$ 의 길이는?



① $6\sqrt{2}$ cm　② 8 cm　③ $5\sqrt{2}$ cm

④ 7 cm　⑤ $4\sqrt{3}$ cm

해설

다음 그림에서 점 O 에서 $\overline{BO'}$ 에 내린 수선의 발을 H 라 하면

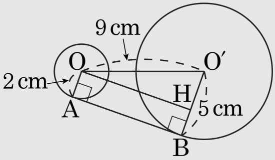
$\overline{AO} = \overline{BH}$

$\therefore \overline{O'H} = 5 - 2 = 3$

따라서 $\triangle OHO'$ 에서

피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{AB} = \overline{OH} = \sqrt{9^2 - 3^2} = 6\sqrt{2}$ cm



23. 직선 $y = x + n$ 과 원 $x^2 + y^2 = 8$ 이 만나지 않도록 하는 자연수 n 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

점 $(0,\ 0)$ 에서 직선 $y = x + n$ 까지의 거리가 반지름의 길이 $2\sqrt{2}$ 보다 크면 된다.

$$\frac{|n|}{\sqrt{2}} > 2\sqrt{2}$$

$\therefore\ n > 4\ (\because n$ 은 자연수$)$

$\therefore$ 최소의 n 은 5 이다.

24. 포물선 $y = x^2$ 을 점 P 에 대하여 대칭이동 시켰더니 포물선 $y = -x^2 + 4x - 2$ 가 되었다. 이 때 점 P 의 좌표는?

① $(1,\ 1)$ ② $(1,\ 2)$ ③ $(-1,\ 1)$

④ $(-1,\ -1)$ ⑤ $(1,\ -1)$

해설

두 포물선이 한 점에 대하여 서로 대칭이면
두 포물선의 꼭지점도 이 점에 대하여 서로 대칭이다.
포물선 $y = x^2$ 의 꼭지점의 좌표는 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ 이고
포물선 $y = -x^2 + 4x - 2$ 의 꼭지점의 좌표는 $\mathrm{A}(2,\ 2)$ 이다.
이 때, 점 P 는 선분 OA 의 중점이므로 P 의 좌표는 $\mathrm{P}(1,\ 1)$ 이다.

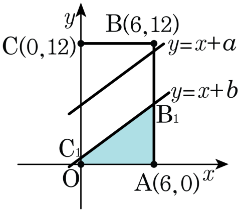
25. 네 점 $\mathrm{A}(-2,3)$, $\mathrm{B}(3,\mathrm{a})$, $\mathrm{C}(\mathrm{b},4)$, $\mathrm{D}(2,8)$을 꼭짓점으로 하는 □ABCD 가 마름모가 되도록 하는 a, b 의 합을 구하면?

① 5　② 6　③ 7　④ 8　⑤ 9

해설

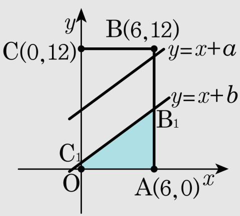
□ABCD가 마름모이므로
$\overline{\mathrm{AD}} \,/\!/\, \overline{\mathrm{BC}},\ \overline{\mathrm{AD}} = \overline{\mathrm{BC}}$이다.
따라서 점 D는 점 A를 x축 방향으로 4만큼
y축 방향으로 5만큼 평행이동한 것이므로
점 C도 점 B를 x축 방향으로 4만큼
y축 방향으로 5만큼 평행이동한 것이다.
$\therefore\ (3+4,\ a+5) = (b,\ 4)$
$\therefore\ a = -1,\ b = 7$
$\therefore\ a + b = 6$

26. 네 점 O(0,0), A(6,0), B(6,12), C(0,12)를 꼭지점으로 하는 사각형 OABC가 있다. 그림과 같이 두 직선 $y = x + a$, $y = x + b$가 사각형 OABC의 넓이를 삼등분할 때, ab의 값은?



① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설



사각형 OABC의 넓이가 72이므로
사각형 OAB_1C_1의 넓이는 24이다.

$\frac{1}{2}(b + 6 + b) \times 6 = 24$이므로 $b = 1$

같은 방법으로 $a = 5$

$\therefore\ ab = 5$

27. 두 점 A$(-4,\ 2)$, B$(2,\ -1)$로 부터의 거리의 비가 $2:1$ 인 점이 나타내는 원의 중심과 직선 $y=3x-4$ 의 거리는?

① $\sqrt{2}$ ② 2 ③ $\sqrt{6}$ ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ $\sqrt{10}$

해설

$\overline{\mathrm{AP}} : \overline{\mathrm{BP}} = 2:1$

$2\overline{\mathrm{BP}} = \overline{\mathrm{AP}}$

$4\overline{\mathrm{BP}}^2 = \overline{\mathrm{AP}}^2$

$4\cdot\left\{(x-2)^2+(y+1)^2\right\} = (x+4)^2+(y-2)^2$

$3x^2+3y^2-24x+12y=0$

$(x-4)^2+(y+2)^2=20$

원의 중심 $(4,\ -2)$와 직선 $3x-y-4=0$ 간의 거리

$\therefore\ \dfrac{|12+2-4|}{\sqrt{3^2+1^2}} = \dfrac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$

28. $y = x + k$ 가 원 $x^2 + y^2 + 6y - 16 = 0$ 에 의해서 잘린 현의 길이가 8 일 때, 상수 k 값의 합은 ?

① 6 ② 9 ③ -6 ④ -9 ⑤ 4

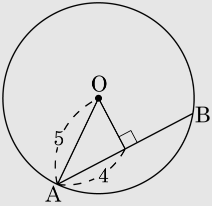
해설

$$\begin{cases} y = x + k & \cdots ㉠ \\ x^2 + (y+3)^2 = 25 \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠, ㉡의 교점을 A, B 라 하면

$\overline{AB} = 8$, $\overline{OA} = 5$ 이므로

점 O 에서 ㉠에 이르는 거리는 3 이다.



$$\frac{|3+k|}{\sqrt{1+1}} = 3, \quad k^2 + 6k - 9 = 0$$

k 값의 합 $\Rightarrow \ -6$

29. 점 $(1,\ 4)$ 를 지나는 직선을 원점에 대하여 대칭이동한 직선이 점 $(2,\ 5)$ 를 지날 때, 처음 직선의 기울기는?

① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

원점에 대하여 대칭이동한 직선이 점 $(2,\ 5)$ 를 지나므로 처음 직선은 점 $(-2, -5)$ 를 지난다.
따라서 처음 직선은 두 점 $(1, 4)$, $(-2, -5)$ 를 지나므로 구하는 기울기는 $\dfrac{4-(-5)}{1-(-2)} = 3$

30. 원 O : $x^2+(y-1)^2=1$을 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 원을 O′이라고 하자. 두 원 O, O′ 의 교점을 각각 A, B 라 할 때, 점 $(6,\ 2)$ 를 직선 AB에 대하여 대칭이동한 점이 $(a,\ b)$이다. 이 때, ab의 값을 구하면?

① -8 ② -12 ③ 8 ④ 12 ⑤ 0

해설

원 O : $x^2+(y-1)^2=1$을 x축의 방향으로 -1만큼,
y축의 방향으로 -1만큼 평행이동하면
O′ : $(x+1)^2+y^2=1$
두 원의 방정식을 일반형으로 변형하면
O : $x^2+y^2-2y=0$, O′ : $x^2+y^2+2x=0$
이 때, 직선 AB의 방정식은 $2x+2y=0$,
즉 $y=-x$
따라서 점 $(6,\ 2)$를 직선 $y=-x$에 대하여
대칭이동한 점은 $(-2,\ -6)$이므로
$a=-2,\ b=-6 \quad \therefore ab=12$