1. $\left(\frac{\sqrt{2}}{1-i}\right)^{2n} = -1$ 을 만족하는 자연수 n 의 값이 <u>아닌</u> 것은? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① 2　　② 6　　③ 8　　④ 10　　⑤ 14

해설

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{1-i}\right)^{2n} = \left(\frac{2}{-2i}\right)^{n} = i^n$$

$i^n = -1$ 이 성립하려면 $n = 4m + 2$ $(m \geq 0)$

③ : $8 = 4 \times 2 + 0$

2. 다음의 이차방정식에 대한 설명 중 <u>틀린</u> 것은? (단, a, b, c는 실수이다.)

① 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하면 $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$이다.

② 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β, $D=b^2-4ac$라고 하면 $(\alpha-\beta)^2=\dfrac{D}{a^2}$이다.

③ 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 서로 다른 부호의 두 실근을 가지기 위한 필요충분 조건은 $ab<0$이다.

④ 이차방정식 $x^2+ax+b=0$이 서로 다른 두 실근을 가지면, $x^2+(a-2c)x+b-ac$도 서로 다른 두 실근을 갖는다.

⑤ 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하면 $\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$, $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$(단, $a\neq 0$)

해설

③ 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 서로 다른 부호의 두 실근을 가지기 위한 필요충분 조건은 $ac<0$이다.

3. 다음 방정식의 모든 해의 합을 구하여라.

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$에서
$x^2 = t$로 놓으면
$t^2 - 13t + 36 = 0$, $(t-4)(t-9) = 0$
$\therefore\ t = 4$ 또는 $t = 9$
(ⅰ) $t = 4$일 때, $x^2 = 4$
$\therefore\ x = \pm 2$
(ⅱ) $t = 9$일 때, $x^2 = 9$
$\therefore\ x = \pm 3$
따라서 모든 해의 합은
$(-2) + 2 + (-3) + 3 = 0$

4. $x = \dfrac{1-i}{1+i}$ 일 때, $x + x^2 + x^3 + \dots + x^{2006} + x^{2007}$ 의 값을 계산하면?

① $-1-i$　　② -1　　③ $-i$

④ 1　　⑤ i

해설

$x = \dfrac{1-i}{1+i} = -i \quad x^2 = -1 \quad x^3 = i \quad x^4 = 1$

$\therefore x + x^2 + x^3 + x^4 = 0$ 이므로, 4개의 항마다 합이 0이 된다.

$\Rightarrow x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{2006} + x^{2007}$

$= 0 + 0 + \cdots + x^{2005} + x^{2006} + x^{2007}$

$= (x^4)^{501} \cdot x + (x^4)^{501} \cdot x^2 + (x^4)^{501} \cdot x^3$

$= -i - 1 + i$

$= -1$

5. 이차함수 $y = x^2 + bx + c$ 일 때, $x = -1$ 에서 최솟값 3 을 가진다. 이때 $b + c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 6

해설

$y = x^2 + bx + c = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4} + c$

아래로 볼록한 그래프이므로 꼭짓점에서 최솟값을 갖는다.

$-1 + \frac{b}{2} = 0$ 이고 $-\frac{b^2}{4} + c = 3$

$\therefore b = 2,\ c = 4$

$\therefore b + c = 2 + 4 = 6$

6. 삼차방정식 $x^3 - ax - b = 0$의 한 근이 $1 - \sqrt{2}$일 때, 유리수 a, b에 대하여 $a + b$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 7

해설

방정식 $x^3 - ax - b = 0$의 계수가 유리수이므로
세 근을 $1 - \sqrt{2}$, $1 + \sqrt{2}$, α라고 하면

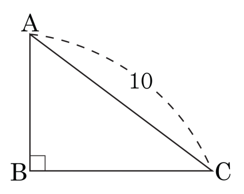
$\left(1 - \sqrt{2}\right) + \left(1 + \sqrt{2}\right) + \alpha = 0 \quad \cdots ㉠$

$\left(1 - \sqrt{2}\right)\left(1 + \sqrt{2}\right) + \left(1 + \sqrt{2}\right)\alpha + \left(1 - \sqrt{2}\right)\alpha = -a \quad \cdots ㉡$

$\left(1 - \sqrt{2}\right)\left(1 + \sqrt{2}\right)\alpha = b \quad \cdots ㉢$

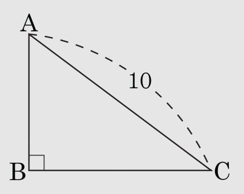
㉠에서 $\alpha = -2$를 ㉡에 대입하면
$-a = 1 - 2 - 2 - 2\sqrt{2} - 2 + 2\sqrt{2} = -5 \quad \therefore\ a = 5$
$\alpha = -2$를 ㉢에 대입하면 $b = -2(1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2}) = 2$
$\therefore\ a + b = 5 + 2 = 7$

7. 다음 그림의 직각삼각형 ABC 에서 둘레의 길이가 24 이고, 빗변의 길이가 10 이다. 이때, 두 선분 AB 와 BC 의 길이의 곱을 구하면?



① 48　② 40　③ 32
④ 18　⑤ 12

해설



$\overline{\mathrm{AB}} = a, \overline{\mathrm{BC}} = b$
둘레의 길이가 24 이므로
$24 = a + b + 10$
$a + b = 14$
직각삼각형이므로,
$a^2 + b^2 = 10^2$
$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$
$ab = \frac{1}{2}\{(a+b)^2 - (a^2+b^2)\}$
$= \frac{1}{2}\left\{14^2 - 10^2\right\} = \frac{1}{2} \cdot 96 = 48$

8. 이차함수 $y = x^2 - 4kx + 2k^2 + k - 1$ 의 최솟값을 m 이라 할 때, m 의 최댓값은?

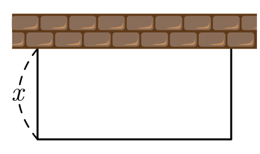
① $-\frac{7}{8}$　　② -1　　③ $\frac{1}{8}$　　④ 1　　⑤ $-\frac{9}{8}$

해설

$y = x^2 - 4kx + 2k^2 + k - 1 = (x - 2k)^2 - 2k^2 + k - 1$

$m = -2k^2 + k - 1 = -2\left(k - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{7}{8}$ 이므로 m 의 최댓값은 $-\frac{7}{8}$ 이다.

9. 다음 그림과 같이 20m 인 철망으로 직사각형의 모양의 닭장을 만들려고 한다.
넓이가 최대가 되도록 하는 x 의 값은?



① 3 m　　② 4 m　　③ 5 m

④ 6 m　　⑤ 7 m

해설

직사각형의 세로의 길이를 x , 가로의 길이를 $20-2x$ 라고 하면,

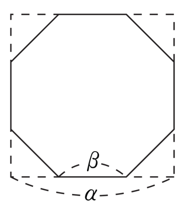
$y = x(20-2x)$

$= -2x^2 + 20x$

$= -2(x-5)^2 + 50$

$x = 5$ 일 때, 최댓값은 50 이다.

10. 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 α인 정사각형의 네 귀퉁이를 잘라 정8각형을 만들고 그 한 변의 길이를 β라 하면, α,β는 이차방정식 $x^2+px+(\sqrt{2}+1)=0$의 두 근이 된다고 한다. 다음 중 α, p의 값으로 옳은 것은?



① $\alpha = \sqrt{2}, \quad p = \sqrt{2}-1$

② $\alpha = \sqrt{2}, \quad p = -\frac{3\sqrt{2}}{2}-1$

③ $\alpha = \sqrt{2}+1, \quad p = -\sqrt{2}$

④ $\alpha = \sqrt{2}+1, \quad p = -\sqrt{2}-2$

⑤ $\alpha = \sqrt{2}-1, \quad p = -\sqrt{2}-1$

해설

잘라낸 귀퉁이는 빗변의 길이가 β인 직각이등변삼각형이므로

다른 한 변의 길이는 $\frac{\sqrt{2}}{2}\beta$이다.

$2 \times \frac{\sqrt{2}}{2}\beta + \beta = \alpha$이므로

$\beta = \frac{\alpha}{\sqrt{2}+1} = (\sqrt{2}-1)\alpha$

α, β는 $x^2+px+(\sqrt{2}+1)=0$의 두 근이므로

$\alpha\beta = (\sqrt{2}-1)\alpha^2 = \sqrt{2}+1$에서

$\alpha^2 = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = (\sqrt{2}+1)^2$

$\alpha > 0$이므로 $\alpha = \sqrt{2}+1$

$\therefore\ p = -(\alpha+\beta) = -\left\{\alpha + (\sqrt{2}-1)\alpha\right\} = -\sqrt{2}-2$