1. $\left(\frac{\sqrt{2}}{1-i}\right)^{2n} = -1$ 을 만족하는 자연수 n 의 값이 아닌 것은? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① 2　　② 6　　③ 8　　④ 10　　⑤ 14

해설

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{1-i}\right)^{2n} = \left(\frac{2}{-2i}\right)^{n} = i^{n}$$

$i^n = -1$ 이 성립하려면 $n = 4m+2$ $(m \geq 0)$

③ : $8 = 4 \times 2 + 0$

2. 다음의 이차방정식에 대한 설명 중 틀린 것은? (단, a, b, c는 실수이다.)

① 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하면 $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$이다.

② 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β, $D=b^2-4ac$라고 하면 $(\alpha-\beta)^2=\dfrac{D}{a^2}$이다.

③ 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 서로 다른 부호의 두 실근을 가지기 위한 필요충분 조건은 $ab<0$이다.

④ 이차방정식 $x^2+ax+b=0$이 서로 다른 두 실근을 가지면, $x^2+(a-2c)x+b-ac$도 서로 다른 두 실근을 갖는다.

⑤ 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하면 $\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$, $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$(단, $a\neq 0$)

해설

③ 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 서로 다른 부호의 두 실근을 가지기 위한 필요충분 조건은 $ac<0$이다.

3. 다음 방정식의 모든 해의 합을 구하여라.

$$x^4-13x^2+36=0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$x^4-13x^2+36=0$ 에서

$x^2=t$ 로 놓으면

$t^2-13t+36=0$, $(t-4)(t-9)=0$

$\therefore\ t=4$ 또는 $t=9$

(i) $t=4$ 일 때, $x^2=4$

$\therefore\ x=\pm 2$

(ii) $t=9$ 일 때, $x^2=9$

$\therefore\ x=\pm 3$

따라서 모든 해의 합은

$(-2)+2+(-3)+3=0$

4. $x = \dfrac{1-i}{1+i}$ 일 때, $x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{2006} + x^{2007}$ 의 값을 계산하면?

① $-1-i$ ② -1 ③ $-i$

④ 1 ⑤ i

해설

$$x = \frac{1-i}{1+i} = -i \quad x^2 = -1 \quad x^3 = i \quad x^4 = 1$$

$\therefore x + x^2 + x^3 + x^4 = 0$ 이므로, 4개의 항마다 합이 0이 된다.

$$\Rightarrow x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{2006} + x^{2007}$$

$$= 0 + 0 + \cdots + x^{2005} + x^{2006} + x^{2007}$$

$$= (x^4)^{501} \cdot x + (x^4)^{501} \cdot x^2 + (x^4)^{501} \cdot x^3$$

$$= -i - 1 + i$$

$$= -1$$

5. 이차함수 $y = x^2 + bx + c$ 일 때, $x = -1$ 에서 최솟값 3 을 가진다. 이때 $b + c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$$y = x^2 + bx + c = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4} + c$$

아래로 볼록한 그래프이므로 꼭짓점에서 최솟값을 갖는다.

$-1 + \dfrac{b}{2} = 0$ 이고 $-\dfrac{b^2}{4} + c = 3$

$\therefore b = 2,\ c = 4$

$\therefore b + c = 2 + 4 = 6$

6. 삼차방정식 $x^3-ax-b=0$의 한 근이 $1-\sqrt{2}$일 때, 유리수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하여라.

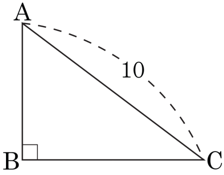
▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

방정식 $x^3-ax-b=0$의 계수가 유리수이므로
세 근을 $1-\sqrt{2}$, $1+\sqrt{2}$, α라고 하면
$\left(1-\sqrt{2}\right)+\left(1+\sqrt{2}\right)+\alpha=0 \quad \cdots ㉠$
$\left(1-\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)+\left(1+\sqrt{2}\right)\alpha+\left(1-\sqrt{2}\right)\alpha=-a \quad \cdots ㉡$
$\left(1-\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)\alpha=b \quad \cdots ㉢$
㉠에서 $\alpha=-2$를 ㉡에 대입하면
$-a=1-2-2-2\sqrt{2}-2+2\sqrt{2}=-5 \quad \therefore\ a=5$
$\alpha=-2$를 ㉢에 대입하면 $b=-2(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})=2$
$\therefore\ a+b=5+2=7$

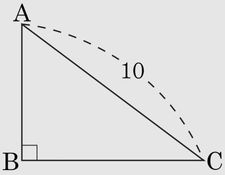
7. 다음 그림의 직각삼각형 ABC 에서 둘레의 길이가 24 이고, 빗변의 길이가 10 이다. 이때, 두 선분 AB 와 BC 의 길이의 곱을 구하면?



① 48 ② 40 ③ 32

④ 18 ⑤ 12

해설



$\overline{\mathrm{AB}} = a, \overline{\mathrm{BC}} = b$

둘레의 길이가 24 이므로

$24 = a + b + 10$

$a + b = 14$

직각삼각형이므로,

$a^2 + b^2 = 10^2$

$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

$$ab = \frac{1}{2}\{(a+b)^2 - (a^2+b^2)\}$$

$$= \frac{1}{2}\{14^2 - 10^2\} = \frac{1}{2} \cdot 96 = 48$$

8. 이차함수 $y = x^2 - 4kx + 2k^2 + k - 1$ 의 최솟값을 m 이라 할 때, m 의 최댓값은?

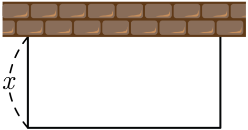
① $-\frac{7}{8}$ ② -1 ③ $\frac{1}{8}$ ④ 1 ⑤ $-\frac{9}{8}$

해설

$y = x^2 - 4kx + 2k^2 + k - 1 = (x - 2k)^2 - 2k^2 + k - 1$

$m = -2k^2 + k - 1 = -2\left(k - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{7}{8}$ 이므로 m 의 최댓값은 $-\frac{7}{8}$ 이다.

9. 다음 그림과 같이 20m 인 철망으로 직사각형의 모양의 닭장을 만들려고 한다. 넓이가 최대가 되도록 하는 x 의 값은?



① 3 m　② 4 m　③ 5 m

④ 6 m　⑤ 7 m

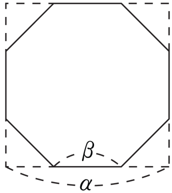
해설

직사각형의 세로의 길이를 x , 가로의 길이를 $20-2x$ 라고 하면,

$$y = x(20-2x)$$
$$= -2x^2 + 20x$$
$$= -2(x-5)^2 + 50$$

$x = 5$ 일 때, 최댓값은 50 이다.

10. 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 α인 정사각형의 네 귀퉁이를 잘라 정8각형을 만들고 그 한 변의 길이를 β라 하면, α, β는 이차방정식 $x^2+px+(\sqrt{2}+1)=0$의 두 근이 된다고 한다. 다음 중 α, p의 값으로 옳은 것은?



① $\alpha = \sqrt{2}, \quad p = \sqrt{2}-1$

② $\alpha = \sqrt{2}, \quad p = -\frac{3\sqrt{2}}{2}-1$

③ $\alpha = \sqrt{2}+1, \quad p = -\sqrt{2}$

④ $\alpha = \sqrt{2}+1, \quad p = -\sqrt{2}-2$

⑤ $\alpha = \sqrt{2}-1, \quad p = -\sqrt{2}-1$

해설

잘라낸 귀퉁이는 빗변의 길이가 β인 직각이등변삼각형이므로

다른 한 변의 길이는 $\frac{\sqrt{2}}{2}\beta$이다.

$2\times\frac{\sqrt{2}}{2}\beta+\beta=\alpha$이므로

$$\beta = \frac{\alpha}{\sqrt{2}+1} = (\sqrt{2}-1)\alpha$$

α, β는 $x^2+px+(\sqrt{2}+1)=0$의 두 근이므로

$\alpha\beta = (\sqrt{2}-1)\alpha^2 = \sqrt{2}+1$에서

$$\alpha^2 = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = (\sqrt{2}+1)^2$$

$\alpha > 0$이므로 $\alpha = \sqrt{2}+1$

$\therefore\ p = -(\alpha+\beta) = -\left\{\alpha+(\sqrt{2}-1)\alpha\right\} = -\sqrt{2}-2$