

1. 3^{2009} 의 일의 자리의 숫자를 a 라 하고, $x = 3^{10}$ 일 때, 3^x 의 일의 자리의 숫자를 b 라 한다. 이 때, 13^{ab} 의 일의 자리의 숫자를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

3의 거듭제곱의 일의 자리의 숫자는 3, 9, 7, 1이 순서대로 반복된다.

따라서 3^{2009} 의 일의 자리의 숫자는 $2009 = 4 \times 502 + 1$ 이므로 3이다. $\therefore a = 3$

또, $10 = 4 \times 2 + 2$ 이므로 3^{10} 의 일의 자리의 숫자는 9이다.

즉, $x = 3^{10}$ 일 때, 3^x 의 일의 자리의 숫자는 3^9 의 일의 자리의 숫자와 같으므로 3이다. $\therefore b = 3$

13^{ab} 즉, 13^9 의 일의 자리의 숫자는 3^9 의 일의 자리의 숫자와 같고

$9 = 4 \times 2 + 1$ 이므로 일의 자리의 숫자는 3이다.

2. $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times 16$ 이 4^n 으로 나누어 떨어지는 자연수 n 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times 16 = 1 \times 4^{\frac{1}{2}} \times 3 \times 4 \times 5 \times (4^{\frac{1}{2}} \times 3) \times 7 \times 4^{\frac{3}{2}} \times 9 \times (4^{\frac{1}{2}} \times 5) \times 11 \times (4 \times 3) \times 13 \times (4^{\frac{1}{2}} \times 7) \times 15 \times 4^2$
→ 4 의 인수를 모두 곱하면,
 $4^{\{\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}+\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}+2\}} = 4^{\frac{15}{2}}$ 이다.
∴ $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times 16$ 이 4^n 으로 나누어 떨어지는 자연수 n 의 최댓값은 7이다.

3. $7^{7^{(7)^2}}$ 의 일의 자리의 숫자를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

7의 거듭제곱의 일의 자리의 숫자는 7, 9, 3, 1이 계속 반복된다.

$7^{7^{(7)^2}} = 7^{7^{49}}$ 에서

7^{49} 의 일의 자리의 숫자는 $49 = 4 \times 12 + 1$ 이므로 7이다.

$x = 7^{49}$ 일 때, 7^x 의 일의 자리의 숫자는 7^7 의 일의 자리의

숫자와 같으므로

$7^{7^{(7)^2}} = 7^{7^{49}}$ 의 일의 자리의 숫자는 $7 = 4 \times 1 + 3$ 이므로 3이다.

4. 어느 박물관의 입장료는 30 명 이상 60 명 미만의 단체에 대해서는 입장료의 2 할 5 푼을 할인해 주고, 60 명 이상의 단체에 대해서는 입장료의 3 할을 할인해 준다고 한다. 30 명 이상 60 명 미만의 단체가 60 명 단체로 표를 사서 할인 혜택을 받는 것이 유리한 것은 몇 명 이상인 경우인지 구하여라.

▶ 답: 명이상

▷ 정답 : 57 명 이상

해설

학생 수를 x 라 하고, 1 인당 요금을 a 원이라 할 때,

$$\frac{75}{100} \times ax > \frac{70}{100} \times a \times 60$$
$$75x > 4200 \quad \therefore x > 56$$

$$75x > 4200 \quad \therefore x > 56$$

∴ 57명 이상

5. 어느 동물원의 입장료가 1 인당 2000 원이다. 단체는 50 명 이상부터이며 20% 를 할인하여 준다고 한다. 이 때, 50 명 단체의 표를 사서 할인혜택을 받는 것이 유리한 것은 몇 명 이상일 때인가?

① 40 명 ② 41 명 ③ 42 명 ④ 43 명 ⑤ 44 명

해설

관람객의 수를 x 라 할 때,
 $2000 \times 50 \times 0.8 < 2000 \times x$
 $x > 40$
 $\therefore$ 41 명 이상

6. M 고궁의 학생 입장료는 2500 원인데 100 명 이상의 단체에게는 20%를 할인해 준다고 한다. 100 명 미만의 단체가 100 명의 단체 입장료를 지불하는 것이 더 유리할 경우는 단체 인원수가 몇 명 이상일 때인지 구하여라.

▶ 답 : 명 이상

▷ 정답 : 81 명 이상

해설

인원수를 x 명이라 할 때,
 $2500x > 0.8 \times 2500 \times 100$, $x > 80$ 이다.
따라서 81 명 이상일 때 100 명의 단체 입장료를 지불하는 것이 더 유리하다.

7. 연립방정식 $\begin{cases} ax + 4y = 17 \\ 5x + by = 10 \end{cases}$ 의 해가 $x = -1, y = 5$ 일 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$ax + 4y = 17$ 에 $x = -1, y = 5$ 를 대입

$$-a + 20 = 17$$

$$a = 3$$

$5x + by = 10$ 에 $x = -1, y = 5$ 를 대입

$$-5 + 5b = 10$$

$$b = 3$$

$$\therefore a + b = 6$$

8. 다음 연립방정식을 풀어라. (단, $xyz \neq 0$)

$$\begin{aligned}2xy + yz + zx &= 7xyz \\ xy + 2yz + zx &= 8xyz \\ xy + yz + 2zx &= 9xyz\end{aligned}$$

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = \frac{1}{2}$

▷ 정답 : $y = \frac{1}{3}$

▷ 정답 : $z = 1$

해설

각 변을 xyz 로 각각 나누면

$$\frac{2}{z} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 7, \frac{1}{z} + \frac{2}{x} + \frac{1}{y} = 8, \frac{1}{z} + \frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 9$$

$$\frac{1}{x} = X, \frac{1}{y} = Y, \frac{1}{z} = Z \text{ 라고 놓으면 주어진 식은}$$

$$X + Y + 2Z = 7, 2X + Y + Z = 8, X + 2Y + Z = 9$$

$$\text{따라서 } X = 2, Y = 3, Z = 1$$

$$\frac{1}{x} = 2, \frac{1}{y} = 3, \frac{1}{z} = 1$$

$$\therefore x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{3}, z = 1$$

9. 연립방정식
$$\begin{cases} 3ab + 2bc + ca = 9abc \\ ab + 3bc - 2ca = 10abc \\ 5ab + 4bc - 3ca = 25abc \end{cases}$$
 의 해를 구하여라 (단,

$abc \neq 0$)

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 1$

▷ 정답 : $b = -\frac{1}{2}$

▷ 정답 : $c = \frac{1}{3}$

해설

각 변을 abc 로 각각 나누면

$$\begin{cases} \frac{3}{c} + \frac{2}{a} + \frac{1}{b} = 9 \\ \frac{c}{1} + \frac{q}{4} - \frac{b}{3} = 10 \\ \frac{c}{5} + \frac{a}{4} - \frac{b}{3} = 25 \end{cases}$$

$\frac{1}{a} = A, \frac{1}{b} = B, \frac{1}{c} = C$ 로 놓으면 주어진 식은

$$\begin{cases} 2A + B + 3C = 9 & \dots\dots ① \\ 3A - 2B + C = 10 & \dots\dots ② \\ 4A - 3B + 5C = 25 & \dots\dots ③ \end{cases}$$

① $\times 2 +$ ② 에서 $7A + 7C = 28$

$\therefore A + C = 4 \dots\dots ④$

① $\times 3 +$ ③ 에서 $10A + 14C = 52$

$\therefore 5A + 7C = 26 \dots\dots ⑤$

④ $\times 5 -$ ⑤ 에서 $-2C = -6 \therefore C = 3$

$C = 3$ 을 ④ 에 대입하면 $A = 1$

$A = 1, C = 3$ 을 ① 에 대입하면 $B = -2$

즉, $A = 1, B = -2, C = 3$ 이므로

$a = 1, b = -\frac{1}{2}, c = \frac{1}{3}$

10. 연립방정식 $\begin{cases} 0.5ax + 0.5y = 4 \\ \frac{1}{2}x - by = 2 \end{cases}$ 에 대하여 해가 무수히 많을 때의 ab

의 값과 해가 없을 때의 $2ab$ 의 값의 합을 구하면?

- ① -9 ② -6 ③ -1 ④ 3 ⑤ 9

해설

$$\begin{cases} 0.5ax + 0.5y = 4 \\ \frac{1}{2}x - by = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ax + 5y = 40 \\ x - 2by = 4 \end{cases} \quad \text{여기서}$$

해가 무수히 많을 때,

$$\frac{a}{1} = \frac{5}{-2b} = \frac{40}{4}$$

$$\frac{a}{1} = \frac{40}{4} \quad \therefore a = 10$$

$$\frac{1}{-2b} = \frac{40}{4}, \quad 8 = -80b \quad \therefore b = -\frac{1}{10}$$

$$\therefore ab = -1$$

$$\text{해가 없을 때, } \frac{a}{1} = \frac{5}{-2b} \neq \frac{40}{4}$$

$$-2ab = 5 \quad \therefore 2ab = -5$$

$$(-1) + (-5) = -6$$

11. x, y 에 관한 연립방정식 $\begin{cases} px + qy + r = 0 \\ qx + ry + p = 0 \end{cases}$ 의 해가 무수히 많을 때,
 $x + y$ 의 값을 구하여라. (단, p, q, r 은 0 이 아닌 실수)

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

주어진 연립방정식의 해가 무수히 많으므로

$$\frac{p}{q} = \frac{q}{r} = \frac{r}{p}$$

$$\frac{p}{q} = \frac{q}{r} = \frac{r}{p} = k \text{ 로 놓으면}$$

$$p = qk, q = rk, r = pk$$

세 식의 좌변끼리, 우변끼리 각각 곱하면

$$pqr = pqrk^3 (pqr \neq 0)$$

$$k^3 = 1$$

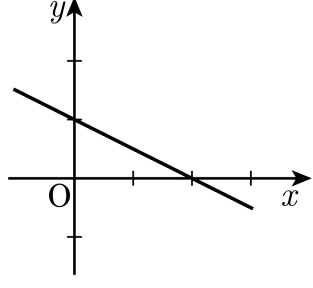
$$\therefore k = 1$$

따라서 $p = q = r$ 이므로 주어진 연립방정식은 모두 $p(x + y + 1) = 0$ 이 된다.

$$p \neq 0 \text{ 이므로 } x + y + 1 = 0$$

$$\therefore x + y = -1$$

12. 다음 연립방정식 중 그 그래프가 다음 그래프와 비슷한 것은?



- ①

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 4x + 2y = 3 \end{cases}$$
- ②

$$\begin{cases} x + 2y = 2 \\ 2(x + y) - 1 = 3 - 2y \end{cases}$$
- ③

$$\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 3 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$$
- ④

$$\begin{cases} 0.1x - 0.3y = -1 \\ 2x - 6y = 20 \end{cases}$$
- ⑤

$$\begin{cases} -x + \frac{y}{2} = \frac{1}{4} \\ -12x + 4y = 2 \end{cases}$$

해설

해가 무수히 많은 것을 찾는다.

$$\textcircled{2} \begin{cases} x + 2y = 2 \\ 2(x + y) - 1 = 3 - 2y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 2y = 2 \\ 2x + 4y = 4 \end{cases}$$

이므로 해가 무수히 많다.