

1. 전체집합이  $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  일 때, 다음 중 옳은 것은?

- ① 조건 ' $x^2 - 6x + 8 = 0$ '의 진리집합은  $\{2, 3\}$  이다.
- ② 조건 ' $x$ 는 소수이다.'의 진리집합은  $\{1, 3, 5\}$  이다.
- ③ 조건 ' $x$ 는 4의 약수이다.'의 진리집합은  $\{0, 1, 2, 4\}$  이다.
- ④ 조건 ' $0 \leq x < 4$  이고  $x \neq 2$  이다.'의 진리집합은  $\{0, 1, 3\}$  이다.
- ⑤ 조건 ' $x$ 는 6의 약수이다.'의 진리집합은  $\{1, 2, 3\}$  이다.

해설

- ①  $x^2 - 6x + 8 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-4) = 0 \Leftrightarrow x = 2$  또는  $x = 4$   
 , 따라서, 진리집합은  $\{2, 4\}$
- ② 소수는 2, 3, 5 이므로 진리집합은  $\{2, 3, 5\}$
- ③ 4의 약수는 1, 2, 4 이므로 진리집합은  $\{1, 2, 4\}$
- ④  $x = 0, 1, 2, 3$  이고  $x \neq 2$  이므로 진리집합은  $\{0, 1, 3\}$
- ⑤ 전체집합이  $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  이고 6의 약수는 1, 2, 3, 6 이므로 진리집합은  $\{1, 2, 3, 6\}$

2. 다음 중에서 참인 명제는? (단, 문자는 실수이다.)

- ①  $x^2 = 1$ 이면  $x^3 = 1$ 이다.
- ②  $\sqrt{(-3)^2} = -3$
- ③  $|x| > 0$ 이면  $x > 0$ 이다.
- ④  $|x + y| = |x - y|$ 이면  $xy = 0$ 이다.
- ⑤ 대각선의 길이가 같은 사각형은 직사각형이다.

해설

- ①  $x = -1$ 이면  $x^2 = 1$ 이지만  $x^3 = -1$  이므로 거짓인 명제이다.
- ②  $\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$  이므로 거짓인 명제이다.
- ③  $x = -2$ 이면  $|-2| = 2 > 0$  이지만  $-2 < 0$ 이므로 거짓인 명제이다.
- ④  $|x + y| = |x - y|$ 의 양변을 제곱하면  $(x + y)^2 = (x - y)^2$   
 $\leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 = x^2 - 2xy + y^2 \leftrightarrow xy = 0$  따라서, 참인 명제이다.
- ⑤ 등변사다리꼴은 대각선의 길이가 같지만 직사각형은 아니다. 따라서, 거짓인 명제이다.

3. 두 조건  $p, q$  를 만족하는 집합을 각각  $P, Q$  라 할 때, 명제  $p \rightarrow q$  가 거짓임을 보이는 반례가 속하는 집합은?

①  $P \cap Q$

②  $P \cup Q$

③  $P^c \cup Q^c$

④  $P - Q$

⑤  $Q - P$

해설

$p \rightarrow q$  가 거짓임을 보이려면  $P$  의 원소 중에서  $Q$  의 원소가 아닌 것을 찾으면 된다. 따라서, 반례가 속하는 집합은  $P \cap Q^c = P - Q$

4. 다음 명제의 대우로 알맞은 것은?

‘ $a+b$ 가 홀수이면  $a, b$  중 하나는 홀수, 다른 하나는 짝수이다.’

- ①  $a+b$ 가 짝수이면  $a, b$  중 하나는 홀수, 다른 하나는 짝수이다.
- ②  $a, b$  모두 짝수이거나 또는 홀수이면  $a+b$ 가 짝수이다.
- ③  $a, b$  중 하나는 짝수, 다른 하나는 홀수이면,  $a+b$ 가 짝수이다.
- ④  $a, b$  중 하나는 홀수, 다른 하나는 짝수이면,  $a+b$ 가 홀수이다.
- ⑤  $a, b$  중 하나는 짝수, 다른 하나는 홀수이면,  $a+b$ 가 홀수이다.

해설

대우 :  $a+b$ 가 짝수이면  $a, b$  중 하나는 홀수, 다른 하나는 짝수이다.

5. 다음은 임의의 자연수  $n$ 에 대하여 『 $n^2$ 이 홀수이면  $n$ 도 홀수이다.』 임을 증명한 것이다. 위의 증명 과정에서 (가), (나) 안에 들어갈 알맞은 것을 순서대로 적은 것은?

주어진 명제의 (가)를 구해보면 『 $n$ 이 짝수이면  $n^2$ 도 짝수이다.』이 때,  $n$ 이 짝수이면  $n =$  (나) (단,  $k$ 는 자연수)  
따라서  $n^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$  이므로  $n^2$ 도 짝수이다.

- ① 대우,  $2k$                       ② 대우,  $4k$                       ③ 대우,  $2k + 1$   
④ 역,  $2k + 1$                       ⑤ 역,  $4k^2$

해설

『 $n^2$ 이 홀수이면  $n$ 도 홀수이다.』의 대우는 『 $n$ 이 짝수이면  $n^2$ 도 짝수이다.』  
∴ (가)-대우  $n$ 이 짝수이면  $n = 2k$   
∴ (나)- $2k$

6. 다음 중  $p$ 가  $q$ 이기 위한 필요충분조건인 것은?( $a, x, y, z$ 는 모두 실수)

- ①  $p : a < b, \quad q : |a| < |b|$   
②  $p : 2x + 3 = 5, \quad q : x^2 - 2x + 1 = 0$   
③  $p : a > 3, \quad q : a^2 > 9$   
④  $p : x > 0$  이고  $y > 0, \quad q : x + y > 0$   
⑤  $p : xy = yz, \quad q : x = z$

해설

주어진 명제도 참이고 역도 참인 것을 고른다.

- ① 주어진 명제, 역 모두 거짓이다.  
②  $p, q$ 를 만족하는 값이 모두  $x = 1$ 이므로 필요충분조건이다.  
③, ④ 주어진 명제만 참이고 역은 성립하지 않는다.  $\therefore p$ 는  $q$ 이기 위한 충분조건이다.  
⑤ 주어진 명제는 거짓이고 역은 참이다.  
 $\therefore p$ 는  $q$ 이기 위한 필요조건이다.

7.  $x - 4 = 0$  이  $x^2 + ax - 48 = 0$  이기 위한 충분조건일 때, 실수  $a$  의 값은?

① 4

② 6

③ 8

④ 10

⑤ 12

해설

$$x - 4 = 0 \Rightarrow x^2 + ax - 48 = 0$$

$$\therefore 16 + 4a - 48 = 0$$

$$\therefore a = 8$$

8. 전체집합  $U$  의 두 부분집합  $A, B$  에 대하여  $(A \cup B) - A = \emptyset$  가 성립하기 위한 필요충분조건은?

①  $A \subset B$

②  $A \cap B = \emptyset$

③  $A \cap B = A$

④  $A \cup B = A$

⑤  $A \cup B = U$

해설

$B$  집합이  $A$  집합 안에 포함된다는 의미이므로 ④가 정답이다.

9.  $0 < a < 1$  일 때,  $P = \frac{1}{a}$ ,  $Q = \frac{1}{2-a}$ ,  $R = \frac{a}{2+a}$  의 대소 관계로 옳은 것은?

- ①  $P < R < Q$       ②  $R < Q < P$       ③  $Q < P < R$   
 ④  $Q < R < P$       ⑤  $R < P < Q$

해설

$$\text{i) } \frac{1}{a} - \frac{1}{2-a} = \frac{2-a-a}{a(2-a)} = \frac{2(1-a)}{a(2-a)}$$

이 때  $a > 0$ ,  $2-a > 0$ ,  $1-a > 0$  이므로

$$\frac{2(1-a)}{a(2-a)} > 0 \quad \therefore \frac{1}{a} > \frac{1}{2-a}$$

즉,  $P > Q$

$$\text{ii) } \frac{1}{a} - \frac{a}{2+a} = \frac{2+a-a^2}{a(2+a)} = \frac{-(a-2)(a+1)}{a(2+a)}$$

이 때  $a > 0$ ,  $2+a > 0$ ,  $a-2 < 0$ ,  $a+1 > 0$  이므로

$$\frac{-(a-2)(a+1)}{a(2+a)} > 0 \quad \therefore \frac{1}{a} > \frac{a}{2+a}$$

즉,  $P > R$

$$\text{iii) } \frac{1}{2-a} - \frac{a}{2+a} = \frac{2+a-a(2-a)}{(2-a)(2+a)}$$

$$= \frac{2+a-2a+a^2}{(2-a)(2+a)} = \frac{a^2-a+2}{(2-a)(2+a)}$$

이 때  $2-a > 0$ ,  $2+a > 0$ ,  $a^2-a+2 > 0$  이므로  $\frac{1}{2-a} > \frac{a}{2+a}$

$\therefore Q > R$  따라서,  $P > Q > R$ 이다.

10. 실수  $a, b$  에 대하여 다음 중  $|a - b| > |a| - |b|$  가 성립할 필요충분조건인 것은?

- ①  $ab \leq 0$
- ②  $ab \geq 0$
- ③  $a + b \geq 0$
- ④  $ab < 0$
- ⑤  $a - b > 0$

해설

$|a - b| > ||a| - |b||$  에 대하여  
 $(a - b)^2 - (||a| - |b||)^2$   
 $= a^2 - 2ab + b^2 - (a^2 - 2|a||b| + b^2)$   
 $= -2ab + 2|a||b| > 0$  이려면  
 $a$  와  $b$  가 서로 부호가 반대이어야 한다.  
따라서  $ab < 0$

11. 자연수  $n$  에 대하여  $2^{4n}$ ,  $3^{3n}$  의 대소를 바르게 비교한 것은?

- ①  $2^{4n} < 3^{3n}$                       ②  $2^{4n} > 3^{3n}$                       ③  $2^{4n} \leq 3^{3n}$   
④  $2^{4n} \geq 3^{3n}$                       ⑤  $2^{4n} = 3^{3n}$

해설

$$\frac{2^{4n}}{3^{3n}} = \left(\frac{2^4}{3^3}\right)^n = \left(\frac{16}{27}\right)^n < 1$$

$$\therefore 2^{4n} < 3^{3n}$$

12. 두 양수  $a, b$ 에 대하여 다음 설명 중 틀린 것은?

- ①  $a, b$ 의 산술 평균은  $\frac{a+b}{2}$ 이다.
- ②  $\sqrt{ab}$ 는  $a, b$ 의 기하평균이다.
- ③  $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ 은 절대부등식이다.
- ④  $\frac{a+b}{2} = \sqrt{ab}$ 이면 반드시  $b = \frac{1}{a}$ 이다.
- ⑤  $a + \frac{1}{a} \geq 2$ 는 항상 성립한다.

해설

$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \dots$  절대부등식

$\frac{a+b}{2}$ : 산술평균,  $\sqrt{ab}$ : 기하평균

④: 절대부등식의 등호는  $a = b$ 일 때 성립한다.

13.  $x > 0, y > 0$  일 때,  $\left(3x + \frac{2}{y}\right)\left(y + \frac{6}{x}\right)$  의 최솟값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 32

해설

$$\left(3x + \frac{2}{y}\right)\left(y + \frac{6}{x}\right) = 20 + 3\left(xy + \frac{4}{xy}\right)$$

산술기하조건을 사용하면

$$xy + \frac{4}{xy} \geq 2\sqrt{xy \times \left(\frac{4}{xy}\right)} = 4$$

$$\therefore \text{최솟값} : 20 + 3 \times 4 = 32$$

14.  $x + y = 3$  일 때,  $xy$  의 최댓값을 구하여라. (단,  $xy > 0$  )

▶ 답 :

▷ 정답 :  $\frac{9}{4}$

해설

$$3 = x + y \geq 2\sqrt{xy}$$

따라서  $x = y = \frac{3}{2}$  일 때,  $xy$  의 최댓값  $\frac{9}{4}$

15.  $x$ 가 양의 실수 일 때,  $x^2 + 1 + \frac{1}{x^2}$ 의 최솟값과 그 때의  $x$ 값을 차례대로

구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

▷ 정답 : 1

해설

$x^2 > 0, \frac{1}{x^2} > 0$ 이므로

산술평균과 기하평균에 의하여

$$x^2 + 1 + \frac{1}{x^2} \geq 2\sqrt{x^2 \times \frac{1}{x^2}} + 1 \geq 2 + 1 = 3$$

등호는  $x^2 = \frac{1}{x^2}$  일 때 성립하므로  $x^4 = 1$

따라서 양의 실수  $x$ 는 1이다.

최솟값은 3이고,  $x$ 값은 1이다.

16. 실수  $x, y$ 에 대하여  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ 이 성립할 때,  $x + y$ 의 최댓값은?

①  $\sqrt{7}$

② 3

③  $\sqrt{13}$

④ 5

⑤ 12

해설

코시-슈바르츠부등식에 의해서

$$(2^2 + 3^2) \left\{ \left( \frac{x}{2} \right)^2 + \left( \frac{y}{3} \right)^2 \right\} \geq (x + y)^2$$

$13 \geq (x + y)^2$  이므로

$$-\sqrt{13} \leq x + y \leq \sqrt{13}$$

$\therefore x + y$ 의 최댓값은  $\sqrt{13}$

17. 두 조건  $p : 0 < x < 3$ ,  $q : -1 < x < 2$  에 대하여 ‘ $\sim p$  또는  $q$ ’의 부정은?

①  $0 < x < 2$

②  $-1 < x < 3$

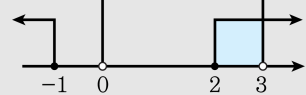
③  $x \leq -1$  또는  $x > 0$

④  $-1 \leq x < 3$

⑤  $2 \leq x < 3$

해설

‘ $\sim p$  또는  $q$ ’의 부정은 ‘ $p$ 이고  $\sim q$ ’이므로  
 $p : 0 < x < 3$ ,  $\sim q : x \leq -1$  또는  $x \geq 2$ 에서



따라서, ‘ $\sim p$  또는  $q$ ’의 부정은  $2 \leq x < 3$ 이다.

18. 실수  $x, y$ 에 대하여 조건 ' $|x| + |y| = 0$ '의 부정과 같은 것은?

- ①  $x = y = 0$
- ②  $x = y \neq 0$
- ③  $x \neq 0$  이고  $y \neq 0$
- ④  $x, y$  중 적어도 하나는 0 이다.
- ⑤  $x, y$  중 적어도 하나는 0 이 아니다.

해설

$|x| + |y| = 0$ 의 부정은  $|x| + |y| \neq 0$ 이다.  
따라서,  $x \neq 0$  또는  $y \neq 0$  이므로  $x, y$  중 적어도 하나는 0 이 아니다.

19. 세 조건  $p, q, r$  를 만족하는 집합을 각각  $P, Q, R$  라 하고 명제  $\sim p \rightarrow \sim q, q \rightarrow \sim r$  가 참일 때, 다음 중 항상 옳은 것은?

- ①  $P \cap Q = Q$       ②  $P \cap R^c = \emptyset$       ③  $P^c \cup R = R$   
④  $Q \cup R = Q$       ⑤  $Q^c \cup R = R$

해설

$\sim p \rightarrow \sim q, q \rightarrow \sim r$  가 참이므로  
 $P^c \subset Q^c, Q \subset R^c$   
따라서  $Q \subset P$  이므로  $P \cap Q = Q$

20. 전체집합을  $U = \{-1, 0, 1\}$ 이라 할 때, 전체집합  $U$ 에 대하여 다음 중 참인 명제는?

- ① 모든  $x$ 에 대하여  $x^2 > 1$ 이다.
- ② 임의의  $x, y$ 에 대하여  $x + y \leq 1$ 이다.
- ③ 어떠한  $x$ 에 대하여도  $x^2 + 2x \geq -1$ 이다.
- ④ 적당한  $x, y$ 에 대하여  $x^2 - y^2 > 1$ 이다.
- ⑤  $x^2 + x < x^3$ 인  $x$ 가 존재한다.

해설

- ① 반례 :  $x = 0$  일 때  $x^2 = 0$  이므로 주어진 명제는 거짓이다.
- ② 반례 :  $x = y = 1$  일 때  $x + y = 2 \geq 1$  이므로 주어진 명제는 거짓이다.
- ③ 모든  $x$ 에 대하여  $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2 \geq 0$  이므로 주어진 명제는 참이다.
- ④ 모든  $x, y$ 에 대하여  $x^2 - y^2 \leq 1$  이므로 주어진 명제는 거짓이다.
- ⑤ 모든  $x$ 에 대하여  $x^2 + x \geq x^3$  이므로 주어진 명제는 거짓이다.

21. 아래의 두 조건에 대하여 명제  $p \rightarrow q$ 가 거짓임을 보이는 반례들의 집합을 구하면?

「 $p : x$ 는 18의 약수,  $q : x$ 는 12의 약수」

- ① {1, 2, 3, 6}
- ② {6, 12, 9, 8}
- ③ {9, 18}
- ④ {12, 18}
- ⑤ {6, 9, 18}

해설

두 조건  $p, q$ 를 만족하는 집합을 각각  $P, Q$ 라 하면,  $P = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$ ,  $Q = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ 이므로 반례들의 집합은  $P - Q = \{9, 18\}$

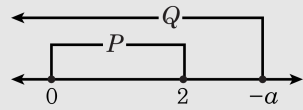
22. 실수  $x$ 에 대한 두 조건  $p : 0 \leq x \leq 2$ ,  $q : x + a \leq 0$ 이 있다. 명제  $p \rightarrow q$ 가 참일 때,  $a$ 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 :  $-2$

해설

$p$ ,  $q$ 를 만족하는 집합을 각각  $P$ ,  $Q$ 라 하면  $p \rightarrow q$ 가 참이므로  $P \subset Q$ 이다.  $P = \{x | 0 \leq x \leq 2\}$ ,  $Q = \{x | x \leq -a\}$



위의 그림에서  $P \subset Q$ 이라면  $2 \leq -a$ ,  $a \leq -2$  따라서  $a$ 의 최댓값은  $-2$

23. 전제집합  $U = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$  에서 세 조건  $p, q, r$  를 만족하는 집합을 각각  $P, Q, R$  라 하자.  $P = \{-1, 0, 1\}$ ,  $Q = \{-1, a + 3\}$ ,  $R = \{2, 4, 2a + 7\}$  이고  $q \rightarrow p, p \rightarrow \sim r$  가 항상 참일 때,  $a$  의 값은?

- ① -3      ② -2      ③ -1      ④ 0      ⑤ 1

해설

$q \rightarrow p, p \rightarrow \sim r$  가 참이므로  $Q \subset P, P \subset R^c$   
 $\therefore Q \subset P \subset R^c$   
 $\{-1, a + 3\} \subset \{-1, 0, 1\} \subset \{2, 4, 2a + 7\}^c$   
 $\{-1, a + 3\} \subset \{-1, 0, 1\} \cdots \textcircled{1}$   
 $\textcircled{1}$ 에서  $a + 3 = -1$  또는  $0$  또는  $1$   
 $\therefore a = -4$  또는  $-3$  또는  $-2$   
 $\{-1, 0, 1\} \subset \{2, 4, 2a + 7\}^c \cdots \textcircled{2}$   
 $\textcircled{2}$ 에서  $2a + 7 \neq -1, 0, 1$   
 $2a \neq -8, -7, -6$   
 $\therefore a \neq -4, -\frac{7}{2}, -3$   
따라서  $\textcircled{1}, \textcircled{2}$  을 동시에 만족시키는  $a$  의 값은  $-2$  이다.

24. 두 실수  $x, y$ 에 대하여 다음 명제가 참일 때, 실수  $k$ 의 최솟값을 구하여라.

$$x + y < 8 \text{이면 } x < -2 \text{ 또는 } y < k$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

주어진 명제가 참이므로 대우도 참이다.  
따라서  $x \geq -2$ 이고  $y \geq k$ 이면  $x + y \geq 8$   
 $x \geq -2, y \geq k$ 에서  $x + y \geq k - 2$ 이므로  
 $k - 2 \geq 8, \therefore k \geq 10$   
따라서  $k$ 의 최솟값은 10이다.

25. 두 명제  $p \rightarrow q$  와  $\sim r \rightarrow \sim q$ 가 모두 참일 때, 다음 중 반드시 참이라고 할 수 없는 것은?

- ①  $q \rightarrow r$
- ②  $\sim p \rightarrow \sim r$
- ③  $\sim r \rightarrow \sim p$
- ④  $p \rightarrow r$
- ⑤  $\sim q \rightarrow \sim p$

해설

주어진 명제가 참이면 그 대우도 참이다.  
 $p \rightarrow q(T) \Rightarrow \sim q \rightarrow \sim p(T)$   
 $\sim r \rightarrow \sim q(T) \Rightarrow q \rightarrow r(T)$   
 $p \rightarrow q \rightarrow r$  이므로,  $p \rightarrow r(T)$   
 $\therefore \sim r \rightarrow \sim p(T)$

26. 두 명제  $p \rightarrow q$ ,  $\sim r \rightarrow \sim q$ 가 모두 참일 때 다음 명제 중에서 반드시 참이라고 할 수 없는 것은?

- ①  $q \rightarrow r$
- ②  $p \rightarrow r$
- ③  $\sim q \rightarrow \sim p$
- ④  $r \rightarrow p$
- ⑤  $\sim r \rightarrow \sim p$

해설

$p \rightarrow q(T) \Rightarrow \sim q \rightarrow \sim p(T)$ ,  $\sim r \rightarrow \sim q(T) \Rightarrow q \rightarrow r(T)$   
 $\therefore p \rightarrow q \rightarrow r(T) \Rightarrow p \rightarrow r(T)$   
 $\therefore \sim r \rightarrow \sim p(T)$

27. 다음의 두 진술이 모두 참이라고 할 때, 옳은 것은?

- ㉠ 키가 큰 학생은 농구를 잘한다.

㉡ 키가 큰 학생은 달리기 또는 수영을 잘한다.

- ① 키가 큰 학생은 달리기를 잘한다.

② 수영을 잘하는 학생은 농구도 잘한다.

③ 농구를 잘하는 학생은 달리기도 잘한다.

④ 달리기를 못하는 학생은 키가 크지 않다.

⑤ 달리기와 수영을 모두 못하는 학생은 키가 크지 않다.

해설

키가 큰 학생의 집합을  $A$ , 농구를 잘하는 학생의 집합을  $B$ , 달  
리기를 잘하는 학생의 집합을  $C$ , 수영을 잘하는 학생의 집합을  
 $D$  라고 하면,

- ㉠  $A \subset B \Leftrightarrow A \subset (C \cup D)$

①  $A \subset (C \cup D)$  에서  $A \subset C$  라고 할 수 없으므로 거짓이다.

②  $D \subset B$  라고 할 수 없으므로 거짓이다.

③  $B \subset C$  라고 할 수 없으므로 거짓이다.

④  $A \not\subset C$  이므로  $C^c \not\subset A^c$  에서 거짓이다.

⑤  $A \subset (C \cup D)$  에서  $(C \cup D)^c \subset A^c$   
즉,  $C^c \cap D^c \subset A^c$  이므로 참이다.

28. 다음 조건  $p$  는 조건  $q$  이기 위한 어떤 조건인지 구하여라.(단,  $a, b$  는 실수)

(i)  $p : a, b$  는 유리수,  $q : a + b, ab$  는 유리수  
(ii)  $p : x$  는 3의 배수,  $q : x$  는 6의 배수

▶ 답: 조건

▷ 정답 : 필요조건

해설

29. 다음 ㉞, ㉟에 알맞은 것끼리 짝지어진 것은?

네 조건  $p, q, r, s$ 에 대하여  $p$ 는  $r$ 이기 위한 충분조건,  $q$ 는  $r$ 이기 위한 충분조건,  $s$ 는  $r$ 이기 위한 필요조건,  $q$ 는  $s$ 이기 위한 필요조건일 때,  $s$ 는  $p$ 이기 위한 (㉞) 조건이며  $p$ 는  $q$ 이기 위한 (㉟) 조건이다.

- ① 필요, 필요

② 필요, 충분

③ 충분, 필요

④ 충분, 충분

⑤ 필요충분, 충분

해설

네 조건  $p, q, r, s$ 를 만족하는 집합은 각각  $P, Q, R, S$ 라고 하면  $p \subset R, Q \subset R, S \supset R, Q \supset S, P \subset R, R \subset S$ 이므로  $P \subset S$  따라서  $S$ 는  $r$ 이기 위한 필요조건이다.  
 $Q \subset R, R \subset S, S \subset Q$ 이므로  $Q = R = S$   
 $P \subset R$ 이므로  $P \subset Q$  따라서  $p$ 는  $q$ 이기 위한 충분조건이다.

30. 다음은  $a > 0, b > 0$  일 때,  $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b}$  임을 증명하는 과정이다. 빈 칸 (가), (나), (다)에 들어갈 식 또는 기호가 순서대로 바르게 나열된 것을 고르면?

$$a > 0, b > 0 \text{ 일 때, } \sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b}$$

(증명)

(가)

−

(나)

$$= (a + 2\sqrt{ab} + b) - (a + b) = 2\sqrt{ab} > 0$$
$$\therefore (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 > (\sqrt{a+b})^2$$

그런데,  $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ 

(다)

 0,

$$\sqrt{a+b}$$

(다)

 0 이므로  $\therefore \sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b}$

- ①  $\sqrt{a} + \sqrt{b}, \sqrt{a+b}, <$
- ②  $\sqrt{a} + \sqrt{b}, \sqrt{a+b}, >$
- ③  $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2, (\sqrt{a+b})^2, <$
- ④  $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2, (\sqrt{a+b})^2, >$
- ⑤  $(\sqrt{a+b})^2, (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2, >$

해설

양 변을 제곱하여  $a - b > 0$  이면  $a > b$  임을 이용한다.

31. 다음은 임의의 실수  $x, y$  에 대하여  $|x| + |y| \geq |x - y|$  가 성립함을 증명하는 과정이다. 과정에서 ㉠ 에 알맞은 것은?

증명

$$\begin{aligned} & (|x| + |y|)^2 - |x - y|^2 \\ &= |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 - (x - y)^2 \\ &= 2(|xy| + xy) \geq 0 \\ &\therefore (|x| + |y|)^2 \geq |x - y|^2 \\ &\text{그런데 } |x| + |y| \geq 0, |x - y| \geq 0 \text{ 이므로} \\ &|x| + |y| \geq |x - y| \text{ (단, 등호는 ( ㉠ ) 일 때, 성립)} \end{aligned}$$

- ①  $xy > 0$
- ②  $xy < 0$
- ③  $xy \geq 0$
- ④  $xy \leq 0$
- ⑤  $xy = 0$

해설

주어진 부등식에서  
등호는  $|xy| + xy = 0$  일 때, 성립한다.  
 $|xy| \geq 0$  이므로  
 $|xy| + xy = 0$  이려면  $xy \leq 0$   
따라서 ㉠ 에 알맞은 것은 ④이다.

32. 실수  $a, b, c, x, y$ 에 대하여 항상 성립하는 부등식(절대부등식)을 다음 [보기] 중에서 고를 때, 옳은 표현의 개수는?

보기

- (㉠)  $x^2 - xy + y^2 \geq 0$
- (㉡)  $x^2 - x + 1 > 0$
- (㉢)  $|a + b| \leq |a| + |b|$
- (㉣)  $a + b \geq 2\sqrt{ab}$
- (㉤)  $(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$
- (㉥)  $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$

- ① 6개      ② 5개      ③ 4개      ④ 3개      ⑤ 2개

해설

- (㉣)  $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ (단,  $a = b$ 일때 등호성립)  
(㉤)  $(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$ (단,  $a = b = c$ 일때 등호성립)

33. 두 실수  $x, y$ 의 제곱의 합이 10일 때,  $x + 3y$ 의 최댓값을  $M$ , 최솟값을  $m$ 이라 한다. 이 때,  $M - m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 20

해설

코시-슈바르츠 부등식에 의해  
 $(1^2 + 3^2)(x^2 + y^2) \geq (x + 3y)^2$   
 $x^2 + y^2 = 10$ 이므로  $100 \geq (x + 3y)^2$   
 $\therefore -10 \leq x + 3y \leq 10$   
 $\therefore M = 10, m = -10$   
 $\therefore M - m = 10 - (-10) = 20$