1. 전체집합이 $U=\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ 일 때, 다음 중 옳은 것은?

① 조건 '$x^2-6x+8=0$' 의 진리집합은 $\{2,\ 3\}$ 이다.

② 조건 'x 는 소수이다.' 의 진리집합은 $\{1,\ 3,\ 5\}$ 이다.

③ 조건 'x 는 4 의 약수이다.' 의 진리집합은 $\{0,\ 1,\ 2,\ 4\}$ 이다.

④ 조건 '$0 \le x < 4$ 이고 $x \ne 2$ 이다.' 의 진리집합은 $\{0,\ 1,\ 3\}$ 이다.

⑤ 조건 'x 는 6 의 약수이다.' 의 진리집합은 $\{1,\ 2,\ 3\}$ 이다.

해설

① $x^2-6x+8=0 \iff (x-2)(x-4)=0 \iff x=2$ 또는 $x=4$
, 따라서, 진리집합은 $\{2,\ 4\}$
② 소수는 2, 3, 5 이므로 진리집합은 $\{2,\ 3,\ 5\}$
③ 4 의 약수는 1, 2, 4 이므로 진리집합은 $\{1,\ 2,\ 4\}$
④ $x=0,\ 1,\ 2,\ 3$ 이고 $x \ne 2$ 이므로 진리집합은 $\{0,\ 1,\ 3\}$
⑤ 전체집합이 $U=\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ 이고 6 의 약수는 1, 2, 3, 6 이므로 진리집합은 $\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$

2. 다음 중에서 참인 명제는? (단, 문자는 실수이다.)

① $x^2 = 1$ 이면 $x^3 = 1$ 이다.

② $\sqrt{(-3)^2} = -3$

③ $|x| > 0$ 이면 $x > 0$ 이다.

④ $|x+y| = |x-y|$ 이면 $xy = 0$ 이다.

⑤ 대각선의 길이가 같은 사각형은 직사각형이다.

해설

① $x = -1$ 이면 $x^2 = 1$ 이지만 $x^3 = -1$ 이므로 거짓인 명제이다.
② $\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$ 이므로 거짓인 명제이다.
③ $x = -2$ 이면 $|-2| = 2 > 0$ 이지만 $-2 < 0$ 이므로 거짓인 명제이다.
④ $|x+y| = |x-y|$ 의 양변을 제곱하면 $(x+y)^2 = (x-y)^2$ $\leftrightarrow$ $x^2 + 2xy + y^2 = x^2 - 2xy + y^2 \leftrightarrow xy = 0$ 따라서, 참인 명제이다.
⑤ 등변사다리꼴은 대각선의 길이가 같지만 직사각형은 아니다. 따라서, 거짓인 명제이다.

3. 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라 할 때, 명제 $p \to q$ 가 거짓임을 보이는 반례가 속하는 집합은?

① $P \cap Q$ ② $P \cup Q$ ③ $P^c \cup Q^c$

④ $P - Q$ ⑤ $Q - P$

해설

$p \to q$ 가 거짓임을 보이려면 P 의 원소 중에서 Q 의 원소가 아닌 것을 찾으면 된다. 따라서, 반례가 속하는 집합은 $P \cap Q^c = P - Q$

4. 다음 명제의 대우로 알맞은 것은?

'$a+b$가 홀수이면 a, b 중 하나는 홀수, 다른 하나는 짝수이다.'

① $a+b$ 가 짝수이면 a, b 중 하나는 홀수, 다른 하나는 짝수이다.

② a, b 모두 짝수이거나 또는 홀수이면 $a+b$ 가 짝수이다.

③ a, b 중 하나는 짝수, 다른 하나는 홀수이면, $a+b$가 짝수이다.

④ a, b중 하나는 홀수, 다른 하나는 짝수이면, $a+b$가 홀수이다.

⑤ a, b 중 하나는 짝수, 다른 하나는 홀수이면, $a+b$ 가 홀수이다.

해설

대우 : $a+b$ 가 짝수이면 a, b 중 하나는 홀수, 다른 하나는 짝수이다.

5. 다음은 임의의 자연수 n에 대하여 『n^2 이 홀수이면 n 도 홀수이다.』 임을 증명한 것이다. 위의 증명 과정에서 (가), (나) 안에 들어갈 알맞은 것을 순서대로 적은 것은?

> 주어진 명제의 (가)를 구해보면 『n 이 짝수이면 n^2 도 짝수이다.』이 때, n 이 짝수이면 $n =$ (나) (단, k 는 자연수)
> 따라서 $n^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$ 이므로 n^2 도 짝수이다.

① 대우, $2k$　② 대우, $4k$　③ 대우, $2k+1$
④ 역, $2k+1$　⑤ 역, $4k^2$

해설

'n^2 이 홀수이면 n 도 홀수이다.' 의 대우는 'n 이 짝수이면 n^2 도 짝수이다.'

$\therefore$ (가)–대우 n 이 짝수이면 $n = 2k$

$\therefore$ (나)– $2k$

6. 다음 중 p가 q이기 위한 필요충분조건인 것은?(a, x, y, z는 모두 실수)

① $p : a < b$, $q : |a| < |b|$

② $p : 2x + 3 = 5$, $q : x^2 - 2x + 1 = 0$

③ $p : a > 3$, $q : a^2 > 9$

④ $p : x > 0$ 이고 $y > 0$, $q : x + y > 0$

⑤ $p : xy = yz$, $q : x = z$

해설

주어진 명제도 참이고 역도 참인 것을 고른다.
① 주어진 명제, 역 모두 거짓이다.
② p, q를 만족하는 값이 모두 $x = 1$이므로 필요충분조건이다.
③, ④ 주어진 명제만 참이고 역은 성립하지 않는다. $\therefore$ p는 q이기 위한 충분조건이다.
⑤ 주어진 명제는 거짓이고 역은 참이다.
$\therefore$ p 는 q 이기 위한 필요조건이다.

7. $x-4=0$ 이 $x^2+ax-48=0$ 이기 위한 충분조건일 때, 실수 a 의 값은?

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

해설

$x-4=0 \Rightarrow x^2+ax-48=0$

$\therefore\ 16+4a-48=0$

$\therefore\ a=8$

8. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $(A \cup B) - A = \varnothing$ 가 성립하기 위한 필요충분조건은?

① $A \subset B$ ② $A \cap B = \varnothing$ ③ $A \cap B = A$

④ $A \cup B = A$ ⑤ $A \cup B = U$

해설

B 집합이 A 집합 안에 포함된다는 의미이므로 ④가 정답이다.

9. $0 < a < 1$일 때, $P = \frac{1}{a}$, $Q = \frac{1}{2-a}$, $R = \frac{a}{2+a}$의 대소 관계로 옳은 것은?

① $P < R < Q$　　② $R < Q < P$　　③ $Q < P < R$

④ $Q < R < P$　　⑤ $R < P < Q$

해설

i) $\frac{1}{a} - \frac{1}{2-a} = \frac{2-a-a}{a(2-a)} = \frac{2(1-a)}{a(2-a)}$

이 때 $a > 0,\ 2-a > 0,\ 1-a > 0$ 이므로

$\frac{2(1-a)}{a(2-a)} > 0 \qquad \therefore \frac{1}{a} > \frac{1}{2-a}$

즉, P>Q

ii) $\frac{1}{a} - \frac{a}{2+a} = \frac{2+a-a^2}{a(2+a)} = \frac{-(a-2)(a+1)}{a(2+a)}$

이 때 $a > 0,\ 2+a > 0,\ a-2 < 0, a+1 > 0$ 이므로

$\frac{-(a-2)(a+1)}{a(2+a)} > 0 \qquad \therefore \frac{1}{a} > \frac{a}{2+a}$

즉, P>R

iii) $\frac{1}{2-a} - \frac{a}{2+a} = \frac{2+a-a(2-a)}{(2-a)(2+a)}$

$= \frac{2+a-2a+a^2}{(2-a)(2+a)} = \frac{a^2-a+2}{(2-a)(2+a)}$

이 때 $2-a > 0, 2+a > 0, a^2-a+2 > 0$이므로 $\frac{1}{2-a} > \frac{a}{2+a}$

$\therefore Q > R$ 따라서, $P > Q > R$이다.

10. 실수 a, b 에 대하여 다음 중 $|a-b| > |a|-|b|$ 가 성립할 필요충분조건인 것은?

① $ab \leq 0$ ② $ab \geq 0$ ③ $a+b \geq 0$

④ $ab < 0$ ⑤ $a-b > 0$

해설

$|a-b| > ||a|-|b||$ 에 대하여

$(a-b)^2 - (||a|-|b||)^2$

$= a^2 - 2ab + b^2 - (a^2 - 2|a||b| + b^2)$

$= -2ab + 2|a||b| > 0$ 이려면

a 와 b 가 서로 부호가 반대이어야 한다.

따라서 $ab < 0$

11. 자연수 n 에 대하여 2^{4n}, 3^{3n} 의 대소를 바르게 비교한 것은?

① $2^{4n} < 3^{3n}$ ② $2^{4n} > 3^{3n}$ ③ $2^{4n} \leq 3^{3n}$

④ $2^{4n} \geq 3^{3n}$ ⑤ $2^{4n} = 3^{3n}$

해설

$$\frac{2^{4n}}{3^{3n}} = \left(\frac{2^4}{3^3}\right)^n = \left(\frac{16}{27}\right)^n < 1$$

$\therefore 2^{4n} < 3^{3n}$

12. 두 양수 a, b에 대하여 다음 설명 중 <u>틀린</u> 것은?

① a, b의 산술 평균은 $\dfrac{a+b}{2}$이다.

② $\sqrt{ab}$는 a, b의 기하평균이다.

③ $a+b \geq 2\sqrt{ab}$은 절대부등식이다.

④ $\dfrac{a+b}{2} = \sqrt{ab}$이면 반드시 $b = \dfrac{1}{a}$이다.

⑤ $a + \dfrac{1}{a} \geq 2$는 항상 성립한다.

해설

$\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \cdots$ 절대부등식

$\dfrac{a+b}{2}$: 산술평균, $\sqrt{ab}$: 기하평균

④: 절대부등식의 등호는 $a = b$일 때 성립한다.

13. $x>0, y>0$일 때, $\left(3x+\frac{2}{y}\right)\left(y+\frac{6}{x}\right)$의 최솟값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 32

해설

$$\left(3x+\frac{2}{y}\right)\left(y+\frac{6}{x}\right)=20+3\left(xy+\frac{4}{xy}\right)$$

산술기하조건을 사용하면

$$xy+\frac{4}{xy}\geq 2\sqrt{xy\times\left(\frac{4}{xy}\right)}=4$$

$\therefore$ 최솟값 : $20+3\times 4=32$

14. $x+y=3$ 일 때, xy 의 최댓값을 구하여라. (단, $xy>0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{9}{4}$

해설

$3=x+y\geq 2\sqrt{xy}$

따라서 $x=y=\frac{3}{2}$ 일 때, xy의 최댓값 $\frac{9}{4}$

15. x가 양의 실수 일 때, $x^2+1+\dfrac{1}{x^2}$ 의 최솟값과 그 때의 x값을 차례대로 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

▷ 정답 : 1

해설

$x^2>0$, $\dfrac{1}{x^2}>0$ 이므로

산술평균과 기하평균에 의하여

$$x^2+1+\frac{1}{x^2}\geq 2\sqrt{x^2\times\frac{1}{x^2}}+1\geq 2+1=3$$

등호는 $x^2=\dfrac{1}{x^2}$ 일 때 성립하므로 $x^4=1$

따라서 양의 실수 x는 1이다.

최솟값은 3이고, x값은 1이다.

16. 실수 x, y에 대하여 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$이 성립할 때, $x+y$의 최댓값은?

① $\sqrt{7}$　② 3　③ $\sqrt{13}$　④ 5　⑤ 12

해설

코시-슈바르츠부등식에 의해서

$$(2^2+3^2)\left\{\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{3}\right)^2\right\} \geq (x+y)^2$$

$13 \geq (x+y)^2$ 이므로

$-\sqrt{13} \leq x+y \leq \sqrt{13}$

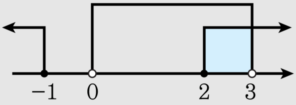
$\therefore$ $x+y$의 최댓값은 $\sqrt{13}$

17. 두 조건 $p : 0 < x < 3$, $q : -1 < x < 2$ 에 대하여 '$\sim p$ 또는 q' 의 부정은?

① $0 < x < 2$
② $-1 < x < 3$
③ $x \leq -1$ 또는 $x > 0$
④ $-1 \leq x < 3$
⑤ $2 \leq x < 3$

해설

'$\sim p$ 또는 q' 의 부정은 'p 이고 $\sim q$' 이므로
$p : 0 < x < 3, \sim q : x \leq -1$ 또는 $x \geq 2$ 에서



따라서, '$\sim p$ 또는 q' 의 부정은 $2 \leq x < 3$ 이다.

18. 실수 x, y 에 대하여 조건 '$|x| + |y| = 0$' 의 부정과 같은 것은?

① $x = y = 0$

② $x = y \neq 0$

③ $x \neq 0$ 이고 $y \neq 0$

④ x, y 중 적어도 하나는 0 이다.

⑤ x, y 중 적어도 하나는 0 이 아니다.

해설

$|x| + |y| = 0$ 의 부정은 $|x| + |y| \neq 0$ 이다.
따라서, $x \neq 0$ 또는 $y \neq 0$ 이므로 x, y 중 적어도 하나는 0 이 아니다.

19. 세 조건 p, q, r 를 만족하는 집합을 각각 P, Q, R 라 하고 명제 $\sim p \to \sim q, q \to \sim r$ 가 참일 때, 다음 중 항상 옳은 것은?

① $P \cap Q = Q$ ② $P \cap R^c = \varnothing$ ③ $P^c \cup R = R$

④ $Q \cup R = Q$ ⑤ $Q^c \cup R = R$

해설

$\sim p \to \sim q, q \to \sim r$ 가 참이므로

$P^c \subset Q^c, Q \subset R^c$

따라서 $Q \subset P$ 이므로 $P \cap Q = Q$

20. 전체집합을 $U = \{-1,\ 0,\ 1\}$이라 할 때, 전체집합 U에 대하여 다음 중 참인 명제는?

① 모든 x에 대하여 $x^2 > 1$이다.

② 임의의 x, y에 대하여 $x + y \leq 1$이다.

③ 어떠한 x에 대하여도 $x^2 + 2x \geq -1$ 이다.

④ 적당한 x, y에 대하여 $x^2 - y^2 > 1$이다.

⑤ $x^2 + x < x^3$ 인 x가 존재한다.

해설

① 반례 : $x = 0$ 일 때 $x^2 = 0$ 이므로 주어진 명제 는 거짓이다.
② 반례 : $x = y = 1$ 일 때 $x + y = 2 \geq 1$ 이므로 주 어진 명제는 거짓이다.
③ 모든 x 에 대하여 $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 \geq 0$ 이므로 주어진 명제는 참이다.
④ 모든 x, y 에 대하여 $x^2 - y^2 \leq 1$ 이므로 주어진 명제는 거짓이다.
⑤ 모든 x 에 대하여 $x^2 + x \geq x^3$ 이므로 주어진 명제는 거짓이다.

21. 아래의 두 조건에 대하여 명제 $p \rightarrow q$ 가 거짓임을 보이는 반례들의 집합을 구하면?

「p : x 는 18 의 약수, q : x 는 12 의 약수」

① $\{1, 2, 3, 6\}$ ② $\{6, 12, 9, 8\}$ ③ $\{9, 18\}$

④ $\{12, 18\}$ ⑤ $\{6, 9, 18\}$

해설

두 조건 p , q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라 하면, $P = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$, $Q = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ 이므로 반례들의 집합은 $P - Q = \{9, 18\}$

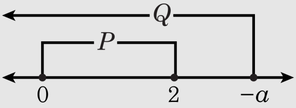
22. 실수 x에 대한 두 조건 p : $0 \le x \le 2$, q : $x+a \le 0$이 있다. 명제 $p \rightarrow q$가 참일 때, a의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

p, q를 만족하는 집합을 각각 P, Q라 하면 $p \rightarrow q$가 참이므로 $P \subset Q$ 이다. $P = \{x|0 \le x \le 2\}$, $Q = \{x|x \le -a\}$



위의 그림에서 $P \subset Q$이려면 $2 \le -a$, $a \le -2$ 따라서 a의 최댓값은 -2

23. 전제집합 $U = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ 에서 세 조건 p, q, r 를 만족하는 집합을 각각 P, Q, R 라 하자. $P = \{-1, 0, 1\}$, $Q = \{-1, a+3\}$, $R = \{2, 4, 2a+7\}$ 이고 $q \to p$, $p \to \sim r$ 가 항상 참일 때, a 의 값은?

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

해설

$q \to p$, $p \to \sim r$ 가 참이므로 $Q \subset P$, $P \subset R^c$

$\therefore Q \subset P \subset R^c$

$\{-1, a+3\} \subset \{-1, 0, 1\} \subset \{2, 4, 2a+7\}^c$

$\{-1, a+3\} \subset \{-1, 0, 1\} \cdots$ ㉠

㉠에서 $a+3 = -1$ 또는 0 또는 1

$\therefore a = -4$ 또는 -3 또는 -2

$\{-1, 0, 1\} \subset \{2, 4, 2a+7\}^c \cdots$ ㉡

㉡에서 $2a+7 \neq -1, 0, 1$

$2a \neq -8, -7, -6$

$\therefore a \neq -4, -\frac{7}{2}, -3$

따라서 ㉠, ㉡ 을 동시에 만족시키는 a 의 값은 -2 이다.

24. 두 실수 x, y에 대하여 다음 명제가 참일 때, 실수 k의 최솟값을 구하여라.

$x+y<8$이면 $x<-2$ 또는 $y<k$

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 10

해설

주어진 명제가 참이므로 대우도 참이다.
따라서 $x \geq -2$이고 $y \geq k$이면 $x+y \geq 8$
$x \geq -2$, $y \geq k$에서 $x+y \geq k-2$이므로
$k-2 \geq 8$, $\therefore$ $k \geq 10$
따라서 k의 최솟값은 10이다.

25. 두 명제 $p \to q$ 와 $\sim r \to \sim q$가 모두 참일 때, 다음 중 반드시 참이라고 할 수 <u>없는</u> 것은?

① $q \to r$ ② $\sim p \to \sim r$ ③ $\sim r \to \sim p$

④ $p \to r$ ⑤ $\sim q \to \sim p$

해설

주어진 명제가 참이면 그 대우도 참이다.

$p \to q\ (T) \Rightarrow \sim q \to \sim p\ (T)$

$\sim r \to \sim q\ (T) \Rightarrow q \to r\ (T)$

$p \to q \to r$ 이므로, $p \to r\ (T)$

$\therefore \sim r \to \sim p\ (T)$

26. 두 명제 $p \to q$, $\sim r \to \sim q$가 모두 참일 때 다음 명제 중에서 반드시 참이라고 할 수 없는 것은?

① $q \to r$ ② $p \to r$ ③ $\sim q \to \sim p$

④ $r \to p$ ⑤ $\sim r \to \sim p$

해설

$p \to q(T) \Rightarrow \sim q \to \sim p\,(T)$, $\sim r \to \sim q\,(T) \Rightarrow q \to r\,(T)$

$\therefore\ p \to q \to r\,(T) \Rightarrow p \to r\,(T)$

$\therefore \sim r \to \sim p\,(T)$

27. 다음의 두 진술이 모두 참이라고 할 때, 옳은 것은?

㉠ 키가 큰 학생은 농구를 잘한다. ㉡ 키가 큰 학생은 달리기 또는 수영을 잘한다.

① 키가 큰 학생은 달리기를 잘한다.

② 수영을 잘하는 학생은 농구도 잘한다.

③ 농구를 잘하는 학생은 달리기도 잘한다.

④ 달리기를 못하는 학생은 키가 크지 않다.

⑤ 달리기와 수영을 모두 못하는 학생은 키가 크지 않다.

해설

키가 큰 학생의 집합을 A, 농구를 잘하는 학생의 집합을 B, 달리기를 잘하는 학생의 집합을 C, 수영을 잘하는 학생의 집합을 D 라고 하면,

㉠ $A \subset B$ ㉡ $A \subset (C \cup D)$

① $A \subset (C \cup D)$ 에서 $A \subset C$ 라고 할 수 없으므로 거짓이다.

② $D \subset B$ 라고 할 수 없으므로 거짓이다.

③ $B \subset C$ 라고 할 수 없으므로 거짓이다.

④ $A \not\subset C$ 이므로 $C^c \not\subset A^c$ 에서 거짓이다.

⑤ $A \subset (C \cup D)$ 에서 $(C \cup D)^c \subset A^c$

즉, $C^c \cap D^c \subset A^c$ 이므로 참이다.

28. 다음 조건p 는 조건q 이기 위한 어떤 조건인지 구하여라.(단,a, b 는 실수)

(i) p : a, b 는 유리수, q : $a+b, ab$ 는 유리수 (ii) p : x 는 3의 배수 , q : x 는 6의 배수

▶ 답 : ______ 조건

▷ 정답 : 필요조건

해설

29. 다음 ㉮, ㉯에 알맞은 것끼리 짝지어진 것은?

> 네 조건 p, q, r, s에 대하여 p는 r이기 위한 충분조건, q는 r이기 위한 충분조건, s는 r이기 위한 필요조건, q는 s이기 위한 필요조건일 때, s는 p이기 위한 (㉮) 조건이며 p는 q이기 위한 (㉯) 조건이다.

① 필요, 필요
② 필요, 충분
③ 충분, 필요
④ 충분, 충분
⑤ 필요충분, 충분

해설

네 조건 p, q, r, s를 만족하는 집합은 각각 P, Q, R, S 라고 하면

$p \subset R$, $Q \subset R$, $S \supset R$, $Q \supset S$, $P \subset R$, $R \subset S$ 이므로 $P \subset S$

따라서 S는 r이기 위한 필요조건이다.

$Q \subset R$, $R \subset S$, $S \subset Q$이므로 $Q = R = S$

$P \subset R$이므로 $P \subset Q$

따라서 p는 q이기 위한 충분조건이다.

30. 다음은 $a>0$, $b>0$ 일 때, $\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{a+b}$ 임을 증명하는 과정이다. 빈 칸 (가), (나), (다)에 들어갈 식 또는 기호가 순서대로 바르게 나열된 것을 고르면?

> $a>0,\ b>0$ 일 때, $\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{a+b}$
> (증명)
> $\boxed{(가)}-\boxed{(나)}$
> $=(a+2\sqrt{ab}+b)-(a+b)=2\sqrt{ab}>0$
> $\therefore\ (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2>(\sqrt{a+b})^2$
> 그런데, $\sqrt{a}+\sqrt{b}\ \boxed{(다)}\ 0$,
> $\sqrt{a+b}\ \boxed{(다)}\ 0$ 이므로 $\therefore\ \sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{a+b}$

① $\sqrt{a}+\sqrt{b},\ \sqrt{a+b},\ <$

② $\sqrt{a}+\sqrt{b},\ \sqrt{a+b},\ >$

③ $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2,\ (\sqrt{a+b})^2,\ <$

④ $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2,\ (\sqrt{a+b})^2,\ >$

⑤ $(\sqrt{a+b})^2,\ (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2,\ >$

해설

양 변을 제곱하여 $a-b>0$ 이면 $a>b$ 임을 이용한다.

31. 다음은 임의의 실수 x, y 에 대하여 $|x|+|y| \geq |x-y|$ 가 성립함을 증명하는 과정이다. 과정에서 ㉠ 에 알맞은 것은?

증명

$(|x|+|y|)^2 - |x-y|^2$
$= |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 - (x-y)^2$
$= 2(|xy| + xy) \geq 0$
$\therefore (|x|+|y|)^2 \geq |x-y|^2$
그런데 $|x|+|y| \geq 0$, $|x-y| \geq 0$ 이므로
$|x|+|y| \geq |x-y|$ (단, 등호는 (㉠) 일 때, 성립)

① $xy > 0$ ② $xy < 0$ ③ $xy \geq 0$
④ $xy \leq 0$ ⑤ $xy = 0$

해설

주어진 부등식에서
등호는 $|xy| + xy = 0$ 일 때, 성립한다.
$|xy| \geq 0$ 이므로
$|xy| + xy = 0$ 이려면 $xy \leq 0$
따라서 ㉠ 에 알맞은 것은 ④이다.

32. 실수 a, b, c, x, y에 대하여 항상 성립하는 부등식(절대부등식)을 다음 [보기] 중에서 고를 때, 옳은 표현의 개수는?

보기

(가) $x^2 - xy + y^2 \geq 0$
(나) $x^2 - x + 1 > 0$
(다) $|a + b| \leq |a| + |b|$
(라) $a + b \geq 2\sqrt{ab}$
(마) $(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$
(바) $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$

① 6개 ② 5개 ③ 4개 ④ 3개 ⑤ 2개

해설

(라) $a + b \geq 2\sqrt{ab}$(단, $a = b$일때 등호성립)
(마) $(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$(단, $a = b = c$일때 등호성립)

33. 두 실수 x, y의 제곱의 합이 10일 때, $x+3y$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 한다. 이 때, $M-m$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 20

해설

코시-슈바르츠 부등식에 의해

$(1^2+3^2)(x^2+y^2) \geq (x+3y)^2$

$x^2+y^2=10$이므로 $100 \geq (x+3y)^2$

$\therefore \ -10 \leq x+3y \leq 10$

$\therefore \ M=10,\ m=-10$

$\therefore \ M-m=10-(-10)=20$