

1. $125^{x+2} = \left(\frac{1}{5}\right)^{2x-11}$ 일 때, x 의 값은?

- ㉠ 1 ㉡ 2 ㉢ 3 ㉣ 4 ㉤ 5

해설

$$(5^3)^{x+2} = 5^{-2x+11}$$

$$5^{3x+6} = 5^{-2x+11}, 3x+6 = -2x+11, x=1$$

2. 모든 양수 x, y 에 대하여 $x^x \times y^y \times x^{-y} \times y^{-x} = \left(\frac{y}{x}\right)^A$ 이 성립할 때, A 를 구하여라. (단, $y > x$)

▶ 답:

▷ 정답: $y - x$

해설

$$\begin{aligned}x^x \times y^y \times x^{-y} \times y^{-x} &= x^x \times y^y \times \frac{1}{x^y} \times \frac{1}{y^x} \\&= \frac{x^x}{y^x} \times \frac{y^y}{x^y} \\&= \left(\frac{x}{y}\right)^x \times \left(\frac{y}{x}\right)^y \\&= \left(\frac{y}{x}\right)^{-x} \times \left(\frac{y}{x}\right)^y \\&= \left(\frac{y}{x}\right)^{y-x}\end{aligned}$$

$\therefore A = y - x$

3. 다음 세 수의 크기를 비교하여 큰 순서대로 나열하여라.

$$2^{81}, 3^{63}, 5^{36}$$

▶ 답:

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: 3^{63}

▷ 정답: 5^{36}

▷ 정답: 2^{81}

해설

$81 = 3^4$, $63 = 3^2 \times 7$, $36 = 2^2 \times 3^2$ 이므로

세 수의 최대공약수는 $3^2 = 9$ 이다.

따라서

$$2^{81}, 3^{63}, 5^{36}$$

$$(2^9)^9, (3^7)^9, (5^4)^9 \text{ 에서}$$

$$2^9 < 5^4 < 3^7 \text{ 이므로 세 수의 크기는 } 2^{81} < 5^{36} < 3^{63}$$

$$\therefore 3^{63}, 5^{36}, 2^{81}$$

4. $4^{x+2} \div 2^{2x-6} \times 25 \cdot 5^{2x-2} = 16 \times 100^x$ 일 때, x 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$\begin{aligned}(\text{좌변}) &= 4^{x+2} \div 2^{2x-6} \times 25 \cdot 5^{2x-2} \\ &= (2^2)^{x+2} \times 2^{6-2x} \times 5^{2+2x-2} \\ &= 2^{2x+4+6-2x} \times 5^{2x} \\ &= 2^{10} \times 5^{2x}\end{aligned}$$

$$(\text{우변}) = 16 \times 100^x = 2^4 \times (2^2 \times 5^2)^x = 2^{4+2x} \times 5^{2x}$$

따라서 $4 + 2x = 10$ 이므로 $x = 3$ 이다.

5. 등식 $x^{3x} = x^{2x+4}$ 가 성립하는 자연수 x 의 값을 구하여 모두 합하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$x^{3x} = x^{2x+4} \text{ 에서}$$

(1) 밑이 같으면 지수가 같아야 등호가 성립하므로 $3x = 2x + 4$, $\therefore x = 4$

(2) 1의 거듭제곱은 지수와 관계없이 항상 1이므로 등호가 성립한다.

즉, $x = 1$ 일 때, $1^3 = 1^6$ 이므로 항상 성립한다. $\therefore x = 1$
따라서 주어진 식을 만족하는 x 의 값을 모두 더하면 $4 + 1 = 5$ 이다.

6. 자연수 a 에 대하여 $a^{a+3} = a^{3a-1}$ 를 만족하는 a 의 값을 모두 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

▷ 정답 : 2

해설

$a^{a+3} = a^{3a-1}$ 에서

㉠ 밑이 같으면 지수가 같아야 등호가 성립하므로

$$a + 3 = 3a - 1, \therefore a = 2$$

㉡ 1 의 거듭제곱은 지수와 관계없이 항상 1 이므로 등호가 성립한다.

즉, $a = 1$ 일 때, $1^4 = 1^2$ 이다. $\therefore a = 1$

따라서 a 의 값은 1 과 2 이다.

7. 임의의 자연수 m, n 에 대하여 $x^m y^n = z^{m-n}$, $x^n y^m = z^{n-m}$ 일 때,
 $\left(\frac{1}{xy}\right)^{m+n}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$\begin{aligned}x^m y^n &= z^{m-n}, x^n y^m = z^{n-m} \text{ 에서} \\z^{m-n} \times z^{n-m} &= z^{m-n+n-m} = z^0 = 1 \\x^m y^n \times x^n y^m &= (xy)^{m+n} = 1 \text{ 에서 } m+n \neq 0 \text{ 이므로 } xy = 1 \text{ 이다.} \\ \therefore \left(\frac{1}{xy}\right)^{m+n} &= 1^{m+n} = 1\end{aligned}$$

8. $b + \frac{6}{c} = c - \frac{1}{a} - 1 = 2$ 일 때, $abc - 3$ 의 값은?

- ① 1 ② 0 ③ -1 ④ 2 ⑤ -2

해설

$$b + \frac{6}{c} = c - \frac{1}{a} - 1 = 2 \text{에서}$$

$b + \frac{6}{c} = 2$ 를 b 에 관한 식으로 풀면

$$b = 2 - \frac{6}{c} = \frac{2(c-3)}{c}$$

$c - \frac{1}{a} - 1 = 2$ 를 a 에 관한 식으로 풀면

$$-\frac{1}{a} = 3 - c$$

$$\frac{1}{a} = c - 3$$

$$a = \frac{1}{c-3}$$

$$\therefore abc - 3 = \frac{1}{(c-3)} \times \frac{2(c-3)}{c} \times c - 3 = 2 - 3 = -1$$

9. $(x-2y) : (3x-y) = 2 : 3$ 일 때, $\frac{3x+2y}{3x-2y}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $\frac{1}{3}$

해설

$(x-2y) : (3x-y) = 2 : 3$ 을 간단히 정리하면

$$6x-2y = 3x-6y, 3x+4y = 0$$

$$\therefore x = -\frac{4}{3}y$$

주어진 식 $\frac{3x+2y}{3x-2y}$ 에 대입하면 $\frac{3(-\frac{4}{3}y)+2y}{3(-\frac{4}{3}y)-2y} = \frac{-4y+2y}{-4y-2y} =$

$$\frac{-2y}{-6y} = \frac{1}{3} \text{ 이다.}$$

10. $x + \frac{1}{y} = 1$, $y + \frac{1}{2z} = 1$ 일 때, $z + \frac{1}{2x}$ 의 값은?

- ① 1 ② -1 ③ 0 ④ $-\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

해설

$x + \frac{1}{y} = 1$, $y + \frac{1}{2z} = 1$ 을 x 와 z 를 y 에 관하여 풀면, $x = \frac{y-1}{y}$,

$$z = \frac{1}{2(1-y)}$$

$z + \frac{1}{2x}$ 에 대입하면

$$\begin{aligned} z + \frac{1}{2x} &= \frac{1}{2(1-y)} + \frac{y}{2(y-1)} \\ &= \frac{1}{2(1-y)} - \frac{y}{2(1-y)} \\ &= \frac{1-y}{2(1-y)} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

11. $(x-y) : (2x-5y) = 1 : 3$ 일 때, $\frac{5x+2y}{4x-y}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $\frac{8}{9}$

해설

$(x-y) : (2x-5y) = 1 : 3$ 을 정리하면

$2x-5y = 3x-3y$, $x+2y=0$

$\therefore x = -2y$

주어진 식 $\frac{5x+2y}{4x-y}$ 에 대입하면 $\frac{5(-2y)+2y}{4(-2y)-y} = \frac{-10y+2y}{-8y-y} =$

$\frac{-8y}{-9y} = \frac{8}{9}$ 이다.

12. 0 이 아닌 세 수 x, y, z 에 대하여 $yz = \frac{1}{x}$ 일 때, $\frac{x}{1+x+xy} + \frac{y}{1+y+yz} + \frac{z}{1+z+zx}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 1

해설

$yz = \frac{1}{x}$ 에서 $xyz = 1$ 을 주어진 식에 대입하여 분모를 $1+y+yz$ 로 통일하면

$$\begin{aligned} & \frac{xyz}{xyz+x+xy} + \frac{y}{1+y+yz} + \frac{z}{xyz+z+zx} \\ &= \frac{1}{1+y+yz} + \frac{y}{1+y+yz} + \frac{1}{1+x+xy} \\ &= \frac{1}{1+y+yz} + \frac{y}{1+y+yz} + \frac{xyz}{xyz+x+xy} \\ &= \frac{1}{1+y+yz} + \frac{y}{1+y+yz} + \frac{yz}{1+y+yz} \\ &= \frac{1+y+yz}{1+y+yz} = 1 \end{aligned}$$

13. $\frac{1}{(x-y)} = \frac{z}{y^2-x^2}$ 일 때, $\frac{yz+zx}{xy} + \frac{zx+xy}{yz} + \frac{xy+yz}{zx}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -3

해설

$\frac{1}{(x-y)} = \frac{z}{y^2-x^2}$ 의 양변에 $x-y$ 를 곱하면

$$1 = \frac{z}{-(x-y)(x+y)} \times (x-y) = \frac{z}{-(x+y)}$$

$$\therefore x+y+z=0 \cdots \textcircled{1}$$

$$\frac{yz+zx}{xy} + \frac{zx+xy}{yz} + \frac{xy+yz}{zx}$$

$$= \left(\frac{z}{x} + \frac{z}{y}\right) + \left(\frac{x}{y} + \frac{x}{z}\right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{y}{x}\right)$$

$$= \frac{y+z}{x} + \frac{x+z}{y} + \frac{x+y}{z} \quad (\textcircled{1} \text{을 대입})$$

$$= \frac{-x}{x} + \frac{-y}{y} + \frac{-z}{z} = -1 - 1 - 1 = -3$$

14. $xy + \frac{1}{z} = 1$, $yz + \frac{1}{x} = 2$ 일 때, $\frac{xyz^2 - xyz}{(1-2x)(2x-1)}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -1

해설

$$xy + \frac{1}{z} = 1, \frac{xyz + 1}{z} = 1, xyz = z - 1 \cdots \textcircled{1}$$

$$yz + \frac{1}{x} = 2, \frac{xyz + 1}{x} = 2, xyz = 2x - 1 \cdots \textcircled{2}$$

$$\frac{xyz^2 - xyz}{(1-2x)(2x-1)} = \frac{xyz(z-1)}{-(2x-1)^2}$$

에 식 $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 대입하여 풀면,

$$\frac{xyz(z-1)}{-(2x-1)^2} = \frac{xyz(xyz)}{-(xyz)^2} = -1$$