

1. $125^{x+2} = \left(\frac{1}{5}\right)^{2x-11}$ 일 때, x 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$(5^3)^{x+2} = 5^{-2x+11}$$

$$5^{3x+6} = 5^{-2x+11}, 3x+6 = -2x+11, x=1$$

2. 모든 양수 x, y 에 대하여 $x^x \times y^y \times x^{-y} \times y^{-x} = \left(\frac{y}{x}\right)^A$ 이 성립할 때, A 를 구하여라. (단, $y > x$)

▶ 답:

▷ 정답: $y - x$

해설

$$\begin{aligned}x^x \times y^y \times x^{-y} \times y^{-x} &= x^x \times y^y \times \frac{1}{x^y} \times \frac{1}{y^x} \\&= \frac{x^x}{y^x} \times \frac{y^y}{x^y} \\&= \left(\frac{x}{y}\right)^x \times \left(\frac{y}{x}\right)^y \\&= \left(\frac{y}{x}\right)^{-x} \times \left(\frac{y}{x}\right)^y \\&= \left(\frac{y}{x}\right)^{y-x}\end{aligned}$$

$$\therefore A = y - x$$

3. 다음 세 수의 크기를 비교하여 큰 순서대로 나열하여라.

$$2^{81}, 3^{63}, 5^{36}$$

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 3^{63}

▷ 정답 : 5^{36}

▷ 정답 : 2^{81}

해설

$81 = 3^4$, $63 = 3^2 \times 7$, $36 = 2^2 \times 3^2$ 이므로
세 수의 최대공약수는 $3^2 = 9$ 이다.

따라서

$$2^{81}, 3^{63}, 5^{36}$$

$(2^9)^9$, $(3^7)^9$, $(5^4)^9$ 에서

$2^9 < 5^4 < 3^7$ 이므로 세 수의 크기는 $2^{81} < 5^{36} < 3^{63}$

$\therefore 3^{63}, 5^{36}, 2^{81}$

4. $4^{x+2} \div 2^{2x-6} \times 25 \cdot 5^{2x-2} = 16 \times 100^x$ 일 때, x 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$\begin{aligned}(\text{좌변}) &= 4^{x+2} \div 2^{2x-6} \times 25 \cdot 5^{2x-2} \\ &= (2^2)^{x+2} \times 2^{6-2x} \times 5^{2+2x-2} \\ &= 2^{2x+4+6-2x} \times 5^{2x} \\ &= 2^{10} \times 5^{2x}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\text{우변}) &= 16 \times 100^x = 2^4 \times (2^2 \times 5^2)^x = 2^{4+2x} \times 5^{2x} \\ &\text{따라서 } 4 + 2x = 10 \text{ 이므로 } x = 3 \text{ 이다.}\end{aligned}$$

5. 등식 $x^{3x} = x^{2x+4}$ 가 성립하는 자연수 x 의 값을 구하여 모두 합하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$x^{3x} = x^{2x+4}$ 에서

(1) 밑이 같으면 지수가 같아야 등호가 성립하므로 $3x = 2x + 4$, $\therefore x = 4$

(2) 1 의 거듭제곱은 지수와 관계없이 항상 1 이므로 등호가 성립한다.

즉, $x = 1$ 일 때, $1^3 = 1^6$ 이므로 항상 성립한다. $\therefore x = 1$

따라서 주어진 식을 만족하는 x 의 값을 모두 더하면 $4 + 1 = 5$ 이다.

6. 자연수 a 에 대하여 $a^{a+3} = a^{3a-1}$ 를 만족하는 a 의 값을 모두 구하여라.

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: 1

▷ 정답: 2

해설

$a^{a+3} = a^{3a-1}$ 에서

㉠ 밑이 같으면 지수가 같아야 등호가 성립하므로

$$a + 3 = 3a - 1, \quad \therefore a = 2$$

㉡ 1 의 거듭제곱은 지수와 관계없이 항상 1 이므로 등호가 성립한다.

즉, $a = 1$ 일 때, $1^4 = 1^2$ 이다. $\therefore a = 1$

따라서 a 의 값은 1 과 2 이다.

7. 임의의 자연수 m, n 에 대하여 $x^m y^n = z^{m-n}$, $x^n y^m = z^{n-m}$ 일 때,
 $\left(\frac{1}{xy}\right)^{m+n}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$x^m y^n = z^{m-n}$, $x^n y^m = z^{n-m}$ 에서

$$z^{m-n} \times z^{n-m} = z^{m-n+n-m} = z^0 = 1$$

$x^m y^n \times x^n y^m = (xy)^{m+n} = 1$ 에서 $m+n \neq 0$ 이므로 $xy = 1$ 이다.

$$\therefore \left(\frac{1}{xy}\right)^{m+n} = 1^{m+n} = 1$$

8. $b + \frac{6}{c} = c - \frac{1}{a} - 1 = 2$ 일 때, $abc - 3$ 의 값은?

① 1

② 0

③ -1

④ 2

⑤ -2

해설

$$b + \frac{6}{c} = c - \frac{1}{a} - 1 = 2 \text{에서}$$

$$b + \frac{6}{c} = 2 \text{를 } b \text{에 관한 식으로 풀면}$$

$$b = 2 - \frac{6}{c} = \frac{2(c-3)}{c}$$

$$c - \frac{1}{a} - 1 = 2 \text{를 } a \text{에 관한 식으로 풀면}$$

$$-\frac{1}{a} = 3 - c$$

$$\frac{1}{a} = c - 3$$

$$a = \frac{1}{c-3}$$

$$\therefore abc - 3 = \frac{1}{(c-3)} \times \frac{2(c-3)}{c} \times c - 3 = 2 - 3 = -1$$

9. $(x - 2y) : (3x - y) = 2 : 3$ 일 때, $\frac{3x + 2y}{3x - 2y}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▶ 정답: $\frac{1}{3}$

해설

$(x - 2y) : (3x - y) = 2 : 3$ 을 간단히 정리하면

$$6x - 2y = 3x - 6y, 3x + 4y = 0$$

$$\therefore x = -\frac{4}{3}y$$

주어진 식 $\frac{3x + 2y}{3x - 2y}$ 에 대입하면 $\frac{3(-\frac{4}{3}y) + 2y}{3(-\frac{4}{3}y) - 2y} = \frac{-4y + 2y}{-4y - 2y} =$

$$\frac{-2y}{-6y} = \frac{1}{3} \text{ 이다.}$$

10. $x + \frac{1}{y} = 1$, $y + \frac{1}{2z} = 1$ 일 때, $z + \frac{1}{2x}$ 의 값은?

① 1

② -1

③ 0

④ $-\frac{1}{2}$

⑤ $\frac{1}{2}$

해설

$x + \frac{1}{y} = 1$, $y + \frac{1}{2z} = 1$ 을 x 와 z 를 y 에 관하여 풀면, $x = \frac{y-1}{y}$,

$$z = \frac{1}{2(1-y)}$$

$z + \frac{1}{2x}$ 에 대입하면

$$z + \frac{1}{2x} = \frac{1}{2(1-y)} + \frac{y}{2(y-1)}$$

$$= \frac{1}{2(1-y)} - \frac{y}{2(1-y)}$$

$$= \frac{1-y}{2(1-y)} = \frac{1}{2}$$

11. $(x - y) : (2x - 5y) = 1 : 3$ 일 때, $\frac{5x + 2y}{4x - y}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 정답 : $\frac{8}{9}$

해설

$(x - y) : (2x - 5y) = 1 : 3$ 을 정리하면

$$2x - 5y = 3x - 3y, \quad x + 2y = 0$$

$$\therefore x = -2y$$

주어진 식 $\frac{5x + 2y}{4x - y}$ 에 대입하면 $\frac{5(-2y) + 2y}{4(-2y) - y} = \frac{-10y + 2y}{-8y - y} =$

$$\frac{-8y}{-9y} = \frac{8}{9} \text{ 이다.}$$

12. 0 이 아닌 세 수 x, y, z 에 대하여 $yz = \frac{1}{x}$ 일 때, $\frac{x}{1+x+xy} + \frac{y}{1+y+yz} + \frac{z}{1+z+zx}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$yz = \frac{1}{x}$ 에서 $xyz = 1$ 을 주어진 식에 대입하여 분모를 $1+y+yz$

로 통일하면

$$\begin{aligned} & \frac{x}{xyz+x+xy} + \frac{y}{1+y+yz} + \frac{z}{xyz+z+zx} \\ &= \frac{1}{1+y+yz} + \frac{y}{1+y+yz} + \frac{1}{1+x+xy} \\ &= \frac{1}{1+y+yz} + \frac{y}{1+y+yz} + \frac{xyz}{xyz+x+xy} \\ &= \frac{1}{1+y+yz} + \frac{y}{1+y+yz} + \frac{yz}{1+y+yz} \\ &= \frac{1+y+yz}{1+y+yz} = 1 \end{aligned}$$

13. $\frac{1}{(x-y)} = \frac{z}{y^2-x^2}$ 일 때, $\frac{yz+zx}{xy} + \frac{zx+xy}{yz} + \frac{xy+yz}{zx}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

$$\frac{1}{(x-y)} = \frac{z}{y^2-x^2} \text{ 의 양변에 } x-y \text{ 를 곱하면}$$

$$1 = \frac{z}{-(x-y)(x+y)} \times (x-y) = \frac{z}{-(x+y)}$$

$$\therefore x+y+z=0 \cdots \textcircled{1}$$

$$\frac{yz+zx}{xy} + \frac{zx+xy}{yz} + \frac{xy+yz}{zx}$$

$$= \left(\frac{z}{x} + \frac{z}{y} \right) + \left(\frac{x}{y} + \frac{x}{z} \right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{y}{x} \right)$$

$$= \frac{y+z}{x} + \frac{x+z}{y} + \frac{x+y}{z} \text{ (}\textcircled{1}\text{을 대입)}$$

$$= \frac{-x}{x} + \frac{-y}{y} + \frac{-z}{z} = -1 - 1 - 1 = -3$$

14. $xy + \frac{1}{z} = 1$, $yz + \frac{1}{x} = 2$ 일 때, $\frac{xyz^2 - xyz}{(1 - 2x)(2x - 1)}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -1

해설

$$xy + \frac{1}{z} = 1, \frac{xyz + 1}{z} = 1, xyz = z - 1 \dots \textcircled{㉠}$$

$$yz + \frac{1}{x} = 2, \frac{xyz + 1}{x} = 2, xyz = 2x - 1 \dots \textcircled{㉡}$$

$$\frac{xyz^2 - xyz}{(1 - 2x)(2x - 1)} = \frac{xyz(z - 1)}{-(2x - 1)^2}$$

에 식 ㉠, ㉡을 대입하여 풀면,

$$\frac{xyz(z - 1)}{-(2x - 1)^2} = \frac{xyz(xyz)}{-(xyz)^2} = -1$$