1. $125^{x+2} = \left(\frac{1}{5}\right)^{2x-11}$ 일 때, x 의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$(5^3)^{x+2} = 5^{-2x+11}$

$5^{3x+6} = 5^{-2x+11}$, $3x+6 = -2x+11$, $x = 1$

2. $27^{x-2} = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-6}$ 일 때, x의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$(3^3)^{x-2} = 3^{-x+6}$

지수 : $3x - 6 = -x + 6, 4x = 12, x = 3$

3. 다음 보기의 수 중에서 가장 큰 수를 a , 가장 작은 수를 b 라 할 때, $a = 2^m$, $b = 2^n$ 이고, $m = 2^p$, $n = 2^q$ 이다. 이 때, $p + q$ 의 값을 구하여라.

보기

$\{(2^2)^2\}^3 \qquad (2^2)^{2^2} \qquad 2^{(2^2)^3} \qquad 2^{2^{2^2}}$

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$\{(2^2)^2\}^3 = 2^{12}$
$(2^2)^{2^2} = 2^{2^3} = 2^8$
$2^{(2^2)^3} = 2^{2^6} = 2^{64}$
$2^{2^{2^2}} = 2^{2^4} = 2^{16}$
따라서 가장 큰 수 $a = 2^{2^6}$, 가장 작은 수 $b = 2^{2^3}$ 이므로
$m = 2^6$, $n = 2^3$
$\therefore\ p + q = 6 + 3 = 9$

4. 다음 세 수의 크기를 비교하여 큰 순서대로 나열하여라.

$2^{81}, \quad 3^{63}, \quad 5^{36}$

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 3^{63}

▷ 정답 : 5^{36}

▷ 정답 : 2^{81}

해설

$81 = 3^4,\ 63 = 3^2 \times 7,\ 36 = 2^2 \times 3^2$ 이므로
세 수의 최대공약수는 $3^2 = 9$ 이다.
따라서
$2^{81}, 3^{63}, 5^{36}$
$(2^9)^9,\ (3^7)^9,\ (5^4)^9$ 에서
$2^9 < 5^4 < 3^7$ 이므로 세 수의 크기는 $2^{81} < 5^{36} < 3^{63}$
$\therefore\ 3^{63},\ 5^{36},\ 2^{81}$

5. $7^{2x-1} + (7^2)^x + 7^{2x-1} = 63$ 을 만족하는 x 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$7^{2x-1} + (7^2)^x + 7^{2x-1} = 63$ 에서

$7^{2x-1} + 7^{2x} + 7^{2x-1} = 63$

$7^{2x} \times \frac{1}{7} + 7^{2x} + 7^{2x} \times \frac{1}{7} = 63$

$7^{2x}(\frac{1}{7} + 1 + \frac{1}{7}) = 63$

$\frac{9}{7} \times 7^{2x} = 63$

$7^{2x} = 63 \times \frac{7}{9} = 7^2$

$\therefore\ x = 1$

6. 등식 $x^{3x} = x^{2x+4}$ 가 성립하는 자연수 x 의 값을 구하여 모두 합하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$x^{3x} = x^{2x+4}$ 에서
(1) 밑이 같으면 지수가 같아야 등호가 성립하므로 $3x = 2x + 4$, $\therefore x = 4$
(2) 1 의 거듭제곱은 지수와 관계없이 항상 1 이므로 등호가 성립한다.
즉, $x = 1$ 일 때, $1^3 = 1^6$ 이므로 항상 성립한다. $\therefore\ x = 1$
따라서 주어진 식을 만족하는 x 의 값을 모두 더하면 $4 + 1 = 5$ 이다.

7. 자연수 a 에 대하여 $a^{a+3} = a^{3a-1}$ 를 만족하는 a 의 값을 모두 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

▷ 정답 : 2

해설

$a^{a+3} = a^{3a-1}$ 에서
㉠밑이 같으면 지수가 같아야 등호가 성립하므로
$a + 3 = 3a - 1, \quad \therefore a = 2$
㉡1 의 거듭제곱은 지수와 관계없이 항상 1 이므로 등호가 성립한다.
즉, $a = 1$ 일 때, $1^4 = 1^2$ 이다. $\therefore a = 1$
따라서 a 의 값은 1 과 2 이다.

8. $b+\frac{6}{c}=c-\frac{1}{a}-1=2$일 때, $abc-3$의 값은?

① 1 ② 0 ③ −1 ④ 2 ⑤ −2

해설

$b+\frac{6}{c}=c-\frac{1}{a}-1=2$에서

$b+\frac{6}{c}=2$를 b에 관한 식으로 풀면

$b=2-\frac{6}{c}=\frac{2(c-3)}{c}$

$c-\frac{1}{a}-1=2$를 a에 관한 식으로 풀면

$-\frac{1}{a}=3-c$

$\frac{1}{a}=c-3$

$a=\frac{1}{c-3}$

$\therefore\ abc-3=\frac{1}{(c-3)}\times\frac{2(c-3)}{c}\times c-3=2-3=-1$

9. $x+\frac{1}{y}=1,\ y+\frac{1}{2z}=1$일 때, $z+\frac{1}{2x}$의 값은?

① 1　② -1　③ 0　④ $-\frac{1}{2}$　⑤ $\frac{1}{2}$

해설

$x+\frac{1}{y}=1,\ y+\frac{1}{2z}=1$을 x와 z를 y에 관하여 풀면, $x=\frac{y-1}{y}$,

$z=\frac{1}{2(1-y)}$

$z+\frac{1}{2x}$ 에 대입하면

$$
\begin{aligned}
z+\frac{1}{2x} &= \frac{1}{2(1-y)}+\frac{y}{2(y-1)} \\
&= \frac{1}{2(1-y)}-\frac{y}{2(1-y)} \\
&= \frac{1-y}{2(1-y)}=\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

10. $(x-2y):(3x-y)=2:3$ 일 때, $\frac{3x+2y}{3x-2y}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{1}{3}$

해설

$(x-2y):(3x-y)=2:3$ 을 간단히 정리하면

$6x-2y=3x-6y, 3x+4y=0$

$\therefore x=-\frac{4}{3}y$

주어진 식 $\frac{3x+2y}{3x-2y}$ 에 대입하면 $\frac{3(-\frac{4}{3}y)+2y}{3(-\frac{4}{3}y)-2y}=\frac{-4y+2y}{-4y-2y}=$

$\frac{-2y}{-6y}=\frac{1}{3}$ 이다.

11. $xyz \neq 0$, $xy = a$, $yz = b$, $zx = c$일 때, $x^2 + y^2 + z^2$의 값을 a, b, c에 관하여 바르게 나타낸 것은?

① $\frac{bc}{c} + \frac{ac}{a} + \frac{ab}{b}$ ② $\frac{bc}{b} + \frac{ac}{c} + \frac{ab}{a}$ ③ $\frac{bc}{c} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{a}$

④ $\frac{bc}{b} + \frac{ac}{a} + \frac{ab}{c}$ ⑤ $\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c}$

해설

$x^2y^2z^2 = abc$이고

$x^2 = \frac{abc}{y^2z^2} = \frac{abc}{b^2} = \frac{ac}{b}$

$y^2 = \frac{abc}{x^2z^2} = \frac{abc}{c^2} = \frac{ab}{c}$

$z^2 = \frac{abc}{x^2y^2} = \frac{abc}{a^2} = \frac{bc}{a}$

$\therefore\ x^2 + y^2 + z^2 = \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} + \frac{bc}{a}$

12. $\frac{1}{(x-y)} = \frac{z}{y^2-x^2}$ 일 때, $\frac{yz+zx}{xy} + \frac{zx+xy}{yz} + \frac{xy+yz}{zx}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

$\frac{1}{(x-y)} = \frac{z}{y^2-x^2}$ 의 양변에 $x-y$ 를 곱하면

$1 = \frac{z}{-(x-y)(x+y)} \times (x-y) = \frac{z}{-(x+y)}$

$\therefore x+y+z=0 \cdots ㉠$

$\frac{yz+zx}{xy} + \frac{zx+xy}{yz} + \frac{xy+yz}{zx}$

$= \left(\frac{z}{x} + \frac{z}{y}\right) + \left(\frac{x}{y} + \frac{x}{z}\right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{y}{x}\right)$

$= \frac{y+z}{x} + \frac{x+z}{y} + \frac{x+y}{z}$ (㉠을 대입)

$= \frac{-x}{x} + \frac{-y}{y} + \frac{-z}{z} = -1-1-1 = -3$

13. $xy + \frac{1}{z} = 1$, $yz + \frac{1}{x} = 2$ 일 때, $\frac{xyz^2 - xyz}{(1-2x)(2x-1)}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$xy + \frac{1}{z} = 1$, $\frac{xyz+1}{z} = 1$, $xyz = z - 1 \cdots$ ㉠

$yz + \frac{1}{x} = 2$, $\frac{xyz+1}{x} = 2$, $xyz = 2x - 1 \cdots$ ㉡

$\frac{xyz^2 - xyz}{(1-2x)(2x-1)} = \frac{xyz(z-1)}{-(2x-1)^2}$

에 식 ㉠, ㉡을 대입하여 풀면,

$\frac{xyz(z-1)}{-(2x-1)^2} = \frac{xyz(xyz)}{-(xyz)^2} = -1$

14. 0 이 아닌 세 수 x, y, z 에 대하여 $yz = \frac{1}{x}$ 일 때, $\frac{x}{1+x+xy} + \frac{y}{1+y+yz} + \frac{z}{1+z+zx}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$yz = \frac{1}{x}$ 에서 $xyz = 1$ 을 주어진 식에 대입하여 분모를 $1+y+yz$ 로 통일하면

$$\frac{x}{xyz+x+xy} + \frac{y}{1+y+yz} + \frac{z}{xyz+z+zx}$$

$$= \frac{1}{1+y+yz} + \frac{y}{1+y+yz} + \frac{1}{1+x+xy}$$

$$= \frac{1}{1+y+yz} + \frac{y}{1+y+yz} + \frac{xyz}{xyz+x+xy}$$

$$= \frac{1}{1+y+yz} + \frac{y}{1+y+yz} + \frac{yz}{1+y+yz}$$

$$= \frac{1+y+yz}{1+y+yz} = 1$$