1. $b+\frac{6}{c}=c-\frac{1}{a}-1=2$일 때, $abc-3$의 값은?

① 1　② 0　③ −1　④ 2　⑤ −2

해설

$b+\frac{6}{c}=c-\frac{1}{a}-1=2$에서

$b+\frac{6}{c}=2$를 b에 관한 식으로 풀면

$b=2-\frac{6}{c}=\frac{2(c-3)}{c}$

$c-\frac{1}{a}-1=2$를 a에 관한 식으로 풀면

$-\frac{1}{a}=3-c$

$\frac{1}{a}=c-3$

$a=\frac{1}{c-3}$

$\therefore\ abc-3=\frac{1}{(c-3)}\times\frac{2(c-3)}{c}\times c-3=2-3=-1$

2. $x+\frac{1}{y}=1,\ y+\frac{1}{2z}=1$일 때, $z+\frac{1}{2x}$의 값은?

① 1 ② -1 ③ 0 ④ $-\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

해설

$x+\frac{1}{y}=1,\ y+\frac{1}{2z}=1$을 x와 z를 y에 관하여 풀면, $x=\frac{y-1}{y}$,

$z=\frac{1}{2(1-y)}$

$z+\frac{1}{2x}$ 에 대입하면

$$\begin{aligned} z+\frac{1}{2x} &= \frac{1}{2(1-y)}+\frac{y}{2(y-1)} \\ &= \frac{1}{2(1-y)}-\frac{y}{2(1-y)} \\ &= \frac{1-y}{2(1-y)}=\frac{1}{2} \end{aligned}$$

3. $xyz \neq 0$, $xy = a$, $yz = b$, $zx = c$일 때, $x^2 + y^2 + z^2$의 값을 a, b, c에 관하여 바르게 나타낸 것은?

① $\frac{bc}{c} + \frac{ac}{a} + \frac{ab}{b}$　② $\frac{bc}{b} + \frac{ac}{c} + \frac{ab}{a}$　③ $\frac{bc}{c} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{a}$
④ $\frac{bc}{b} + \frac{ac}{a} + \frac{ab}{c}$　⑤ $\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c}$

해설

$x^2y^2z^2 = abc$이고

$x^2 = \frac{abc}{y^2z^2} = \frac{abc}{b^2} = \frac{ac}{b}$

$y^2 = \frac{abc}{x^2z^2} = \frac{abc}{c^2} = \frac{ab}{c}$

$z^2 = \frac{abc}{x^2y^2} = \frac{abc}{a^2} = \frac{bc}{a}$

$\therefore\ x^2 + y^2 + z^2 = \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} + \frac{bc}{a}$

4. $(x-2y):(3x-y)=2:3$ 일 때, $\dfrac{3x+2y}{3x-2y}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\dfrac{1}{3}$

해설

$(x-2y):(3x-y)=2:3$ 을 간단히 정리하면

$6x-2y=3x-6y, 3x+4y=0$

$\therefore x=-\dfrac{4}{3}y$

주어진 식 $\dfrac{3x+2y}{3x-2y}$ 에 대입하면 $\dfrac{3(-\frac{4}{3}y)+2y}{3(-\frac{4}{3}y)-2y}=\dfrac{-4y+2y}{-4y-2y}=$

$\dfrac{-2y}{-6y}=\dfrac{1}{3}$ 이다.

5. $xy + \frac{1}{z} = 1$, $yz + \frac{1}{x} = 2$ 일 때, $\frac{xyz^2 - xyz}{(1-2x)(2x-1)}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$xy + \frac{1}{z} = 1$, $\frac{xyz+1}{z} = 1$, $xyz = z - 1 \cdots$ ㉠

$yz + \frac{1}{x} = 2$, $\frac{xyz+1}{x} = 2$, $xyz = 2x - 1 \cdots$ ㉡

$\frac{xyz^2 - xyz}{(1-2x)(2x-1)} = \frac{xyz(z-1)}{-(2x-1)^2}$

에 식 ㉠, ㉡을 대입하여 풀면,

$\frac{xyz(z-1)}{-(2x-1)^2} = \frac{xyz(xyz)}{-(xyz)^2} = -1$

6. $\dfrac{1}{(x-y)}=\dfrac{z}{y^2-x^2}$ 일 때, $\dfrac{yz+zx}{xy}+\dfrac{zx+xy}{yz}+\dfrac{xy+yz}{zx}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

$\dfrac{1}{(x-y)}=\dfrac{z}{y^2-x^2}$ 의 양변에 $x-y$ 를 곱하면

$1=\dfrac{z}{-(x-y)(x+y)}\times(x-y)=\dfrac{z}{-(x+y)}$

$\therefore\ x+y+z=0\cdots$ ㉠

$\dfrac{yz+zx}{xy}+\dfrac{zx+xy}{yz}+\dfrac{xy+yz}{zx}$

$=\left(\dfrac{z}{x}+\dfrac{z}{y}\right)+\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{x}{z}\right)+\left(\dfrac{y}{z}+\dfrac{y}{x}\right)$

$=\dfrac{y+z}{x}+\dfrac{x+z}{y}+\dfrac{x+y}{z}$ (㉠을 대입)

$=\dfrac{-x}{x}+\dfrac{-y}{y}+\dfrac{-z}{z}=-1-1-1=-3$

7. $a+b+c=1$ 일 때, $\frac{b+c}{(1-a)^2}+\frac{a+c}{(1-b)^2}+\frac{a+b}{(1-c)^2}-\frac{ab+ac}{(1-a)^2}-\frac{ab+bc}{(1-b)^2}-\frac{ac+bc}{(1-c)^2}$ 의 값을 구하여라. (단, $a \neq 1$, $b \neq 1$, $c \neq 1$)

▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

$\frac{b+c}{(1-a)^2}+\frac{a+c}{(1-b)^2}+\frac{a+b}{(1-c)^2}$

$-\frac{ab+ac}{(1-a)^2}-\frac{ab+bc}{(1-b)^2}-\frac{ac+bc}{(1-c)^2}$

$=\frac{b+c-a(b+c)}{(1-a)^2}+\frac{a+c-b(a+c)}{(1-b)^2}+\frac{a+b-c(a+b)}{(1-c)^2}$

$=\frac{(b+c)(1-a)}{(1-a)^2}+\frac{(a+c)(1-b)}{(1-b)^2}+\frac{(a+b)(1-c)}{(1-c)^2}$

$=\frac{b+c}{1-a}+\frac{a+c}{1-b}+\frac{a+b}{1-c}\cdots$ ㉠

$a+b+c=1$ 이므로

$b+c=1-a,\ a+c=1-b,\ a+b=1-c$ 이고, 이 식들을 식 ㉠에 대입하면,

$\frac{b+c}{1-a}+\frac{a+c}{1-b}+\frac{a+b}{1-c}$

$=\frac{1-a}{1-a}+\frac{1-b}{1-b}+\frac{1-c}{1-c}$

$=1+1+1=3$