1. $b+\frac{6}{c}=c-\frac{1}{a}-1=2$일 때, $abc-3$의 값은?

① 1 ② 0 ③ -1 ④ 2 ⑤ -2

해설

$b+\frac{6}{c}=c-\frac{1}{a}-1=2$에서

$b+\frac{6}{c}=2$를 b에 관한 식으로 풀면

$b=2-\frac{6}{c}=\frac{2(c-3)}{c}$

$c-\frac{1}{a}-1=2$를 a에 관한 식으로 풀면

$-\frac{1}{a}=3-c$

$\frac{1}{a}=c-3$

$a=\frac{1}{c-3}$

$\therefore\ abc-3=\frac{1}{(c-3)}\times\frac{2(c-3)}{c}\times c-3=2-3=-1$

2. $a+b+c=1$, $a^2+b^2+c^2=\dfrac{3}{2}$, $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=1$일 때, abc의 값은?

① -1　② $-\dfrac{1}{2}$　③ $-\dfrac{1}{3}$　④ $-\dfrac{1}{4}$　⑤ $-\dfrac{1}{5}$

해설

$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=1$의 양변에 abc를 곱하면

$ab+bc+ca=abc$

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$이므로

$1=\dfrac{3}{2}+2(ab+bc+ca)$

$\therefore ab+bc+ca=abc=-\dfrac{1}{4}$

3. $x+\frac{1}{y}=1,\ y+\frac{1}{z}=1$ 일 때, $z+\frac{1}{x}$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$x+\frac{1}{y}=1,\ y+\frac{1}{z}=1$을 x와 z를 y에 관하여 풀면 $x=\frac{y-1}{y}$,

$z=\frac{1}{1-y}$

$z+\frac{1}{x}$ 에 대입하면

$z+\frac{1}{x}=\frac{1}{1-y}+\frac{y}{y-1}=\frac{-1}{y-1}+\frac{y}{y-1}=1$

4. $(x-2y):(3x-y)=2:3$ 일 때, $\dfrac{3x+2y}{3x-2y}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\dfrac{1}{3}$

해설

$(x-2y):(3x-y)=2:3$ 을 간단히 정리하면

$6x-2y=3x-6y, 3x+4y=0$

$\therefore x=-\dfrac{4}{3}y$

주어진 식 $\dfrac{3x+2y}{3x-2y}$ 에 대입하면 $\dfrac{3(-\frac{4}{3}y)+2y}{3(-\frac{4}{3}y)-2y}=\dfrac{-4y+2y}{-4y-2y}=$

$\dfrac{-2y}{-6y}=\dfrac{1}{3}$ 이다.

5. 0 이 아닌 세 수 x, y, z 에 대하여 $xyz = 1$ 일 때, $\dfrac{1}{x+y+z}\left\{\left(x+\dfrac{1}{yz}\right)+\left(y+\dfrac{1}{zx}\right)+\left(z+\dfrac{1}{xy}\right)\right\}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$xyz = 1$ 이므로, $\dfrac{1}{yz} = x$, $\dfrac{1}{zx} = y$, $\dfrac{1}{xy} = z$ 로 나타낼 수 있다.

이를 주어진 식에 대입하면,

$$\frac{1}{x+y+z}\left\{\left(x+\frac{1}{yz}\right)+\left(y+\frac{1}{zx}\right)+\left(z+\frac{1}{xy}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{x+y+z}\{(x+x)+(y+y)+(z+z)\}$$

$$=\frac{1}{x+y+z}(2x+2y+2z)$$

$$=\frac{2(x+y+z)}{x+y+z}=2$$

6. $a+b+c=1$ 일 때, $\frac{b+c}{(1-a)^2}+\frac{a+c}{(1-b)^2}+\frac{a+b}{(1-c)^2}-\frac{ab+ac}{(1-a)^2}-\frac{ab+bc}{(1-b)^2}-\frac{ac+bc}{(1-c)^2}$ 의 값을 구하여라. (단, $a\neq 1$, $b\neq 1$, $c\neq 1$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$\frac{b+c}{(1-a)^2}+\frac{a+c}{(1-b)^2}+\frac{a+b}{(1-c)^2}$$
$$-\frac{ab+ac}{(1-a)^2}-\frac{ab+bc}{(1-b)^2}-\frac{ac+bc}{(1-c)^2}$$
$$=\frac{b+c-a(b+c)}{(1-a)^2}+\frac{a+c-b(a+c)}{(1-b)^2}+\frac{a+b-c(a+b)}{(1-c)^2}$$
$$=\frac{(b+c)(1-a)}{(1-a)^2}+\frac{(a+c)(1-b)}{(1-b)^2}+\frac{(a+b)(1-c)}{(1-c)^2}$$
$$=\frac{b+c}{1-a}+\frac{a+c}{1-b}+\frac{a+b}{1-c}\cdots ㉠$$

$a+b+c=1$ 이므로

$b+c=1-a,\ a+c=1-b,\ a+b=1-c$ 이고, 이 식들을 식 ㉠에 대입하면,

$$\frac{b+c}{1-a}+\frac{a+c}{1-b}+\frac{a+b}{1-c}$$
$$=\frac{1-a}{1-a}+\frac{1-b}{1-b}+\frac{1-c}{1-c}$$
$$=1+1+1=3$$

7. $x+\frac{1}{y}=y+\frac{1}{z}=1$ 일 때, xyz^2+yz 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$x+\frac{1}{y}=y+\frac{1}{z}=1$ 에서

$y+\frac{1}{z}=1$, $\frac{yz+1}{z}=1$, $yz+1=z$

따라서 $yz=z-1$

마찬가지 방법으로 $xy=y-1$

따라서 주어진 식에 $xy=y-1$, $yz=z-1$ 를 대입하면

$$\begin{aligned} xyz^2+yz &= (y-1)z^2+yz \\ &= yz^2-z^2+yz \\ &= yz(z+1)-z^2 \\ &= (z-1)(z+1)-z^2 \\ &= z^2-1-z^2 \\ &= -1 \end{aligned}$$