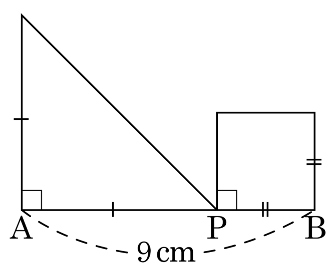
1. 이차함수 $y = kx^2 + 4\sqrt{2}x + k + 2$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만나기 위한 정수 k의 값들의 합은?

① -3　　② -5　　③ 7　　④ 3　　⑤ 5

해설

이차방정식 $kx^2 + 4\sqrt{2}x + k + 2 = 0$이
서로 다른 두 실근을 가지므로
이 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4} = (2\sqrt{2})^2 - k(k+2) > 0$
$8 - k^2 - 2k > 0, (k+4)(k-2) < 0$
$\therefore\ -4 < k < 2$
따라서 정수 k는 $-3, -2, -1, 0, 1$이다.
$\therefore\ (-3) + (-2) + (-1) + 0 + 1 = -5$

2. 길이가 9 cm 인 선분 AB 위에 점 P 를 잡아서 다음 그림과 같이 직각이등변삼각형과 정사각형을 만들어 넓이의 합이 최소가 되게 할 때, 선분 AP 의 길이는?



① 6cm ② 5.5cm ③ 5cm
④ 4.5cm ⑤ 4cm

해설

선분 AP 의 길이를 x 라 하고 직각이등변삼각형과 정사각형의 넓이의 합을 S 라 하면

$S = \frac{1}{2}x^2 + (9 - x)^2 = \frac{3}{2}(x - 6)^2 + 27$

따라서 $\overline{\mathrm{AP}} = 6(\mathrm{cm})$ 일 때 넓이가 최소이다.

3. 방정식 $x(x+2)(x+4)(x+6)+15=0$ 을 풀면?

① $x=-2$ 또는 $x=-3$ 또는 $x=-2\pm\sqrt{3}$

② $x=2$ 또는 $x=4$ 또는 $x=-3$ 또는 $x=-5$

③ $x=-2\pm\sqrt{5}$ 또는 $x=-1\pm\sqrt{6}$

④ $x=-3\pm\sqrt{5}i$ 또는 $x=-2\pm\sqrt{6}i$

⑤ $x=-1$ 또는 $x=-5$ 또는 $-3\pm\sqrt{6}$

해설

$x(x+6)=x^2+6x$

$(x+2)(x+4)=x^2+6x+8$

$x^2+6x=X$ 로 놓으면

$x(x+2)(x+4)(x+6)+15=0$

$X(X+8)+15=0,$

$X^2+8X+15=0$

$(X+3)(X+5)=0$

$\therefore\ X=-3, X=-5$

㉠ : $X=-3 \Rightarrow\ x^2+6x+3=0,$

$x=-3\pm\sqrt{9-3}=-3\pm\sqrt{6}$

㉡ : $X=-5 \Rightarrow\ x^2+6x+5=0,$

$(x+5)(x+1)=0,\ x=-1,-5$

4. x에 대한 삼차방정식 $x^3+2x^2+(k+1)x+k=0$의 근이 모두 실근이 되도록 하는 실수 k의 값의 범위는?

① $-1 \le k$　② $1 \le k < 2$　③ $k > 0$
④ $-1 < k \le \frac{1}{4}$　⑤ $k \le \frac{1}{4}$

해설

방정식 $x^3 + 2x^2 + (k+1) + k = 0$을 조립제법을 이용하여 인수분해하면
$(x+1)(x^2+x+k)=0$
이 때, 주어진 방정식의 모든 근이 실근이 되려면
방정식 $x^2+x+k=0$이 실근을 가져야 하므로
$D = 1^2 - 4k \ge 0$
$\therefore\ k \le \frac{1}{4}$

5. α, β를 방정식 $x^3=1$의 두 허근이라 할 때, $\left(\frac{1}{\alpha}+1\right)^{10}+(\beta^2+1)^{10}$의 값을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^3-1=0$, $(x-1)(x^2+x+1)=0$의
두 허근이 α,β라면,
$x^2+x+1=0$의 두 허근이 α,β이다.
$\alpha+\beta=-1$, $\alpha\beta=1$
$\alpha^2+\alpha+1=0$, $\alpha+1+\frac{1}{\alpha}=0$,
$\frac{1}{\alpha}+1=-\alpha$
$\beta^2+\beta+1=0$,
$\beta^2+1=-\beta$
$\alpha^3=1, \beta^3=1$
$\left(\frac{1}{\alpha}+1\right)^{10}+(\beta^2+1)^{10}$
$=(-\alpha)^{10}+(-\beta)^{10}$
$=\alpha^{10}+\beta^{10}$
$=(\alpha^3)^3\alpha+(\beta^3)^3\beta$
$=\alpha+\beta=-1$

6. 사차방정식 $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$의 서로 다른 실근은 모두 몇 개인가?

① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

$x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x^2 - 4)(x^2 - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad (x+2)(x-2)(x+1)(x-1) = 0$

$\therefore\ x = 2$ 또는 $x = -2$ 또는 $x = 1$ 또는 $x = -1$

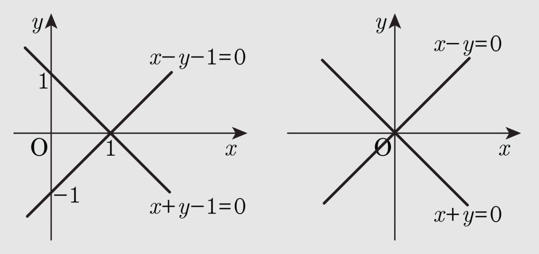
7. 좌표평면에서 두 영역 $(x+y-1)(x-y-1)=0$, $x^2-y^2=0$을 동시에 만족하는 $(x,\ y)$의 개수는?

① 무한히 많다. ② 0개 ③ 1개

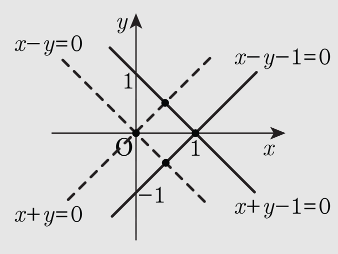
④ 2개 ⑤ 4개

해설

두 영역을 좌표평면에 나타내면 다음과 같다.



이것을 하나의 좌표평면에 그리면



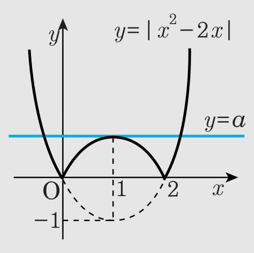
위에서 점선과 실선의 교점의 개수는 2개이다.

8. 함수 $y = |x^2 - 2x|$ 의 그래프와 직선 $y = a$ 가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 상수 a 의 값은?

① $-\frac{1}{2}$　② 0　③ $\frac{1}{2}$　④ 1　⑤ 2

해설

함수 $y = |x^2 - 2x|$ 의 그래프를 그리면
아래 그림과 같다.



이때, 직선 $y = a$와 서로 다른 세 점에서 만나려면
직선 $y = a$ 가 포물선 $y = -x^2 + 2x$ 의
꼭지점을 지나야 한다.
$y = -x^2 + 2x = -(x-1)^2 + 1$ 에서
꼭지점의 좌표는 $(1, 1)$ 이므로 $y = 1$
$\therefore\ a = 1$

9. $y = ax^2 + bx + c$ 에서 $a > 0$, $b^2 - 4ac > 0$ 일 때, y 의 최댓값, 최솟값에 대한 설명 중 옳은 것은?

① 최댓값, 최솟값이 없다.
② 최솟값이 양수이다.
③ 최솟값이 음수이다.
④ 최댓값이 양수이다.
⑤ 최댓값이 음수이다.

해설

아래로 볼록하고, x 축과 두 점에서 만나므로 최솟값은 음수이다.

10. 이차함수 $y = 2x^2 - 8x + 3a - 4$ 의 최솟값은 -5보다 크고, 그 그래프가 점 $(2a,\ 8a+5)$를 지날 때, 상수 a 의 값은?

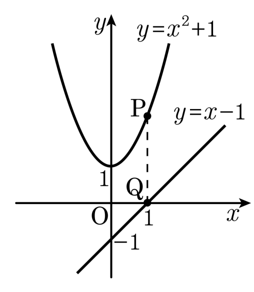
① -3 ② $-\frac{3}{8}$ ③ $\frac{3}{8}$ ④ 3 ⑤ 6

해설

$y = 2x^2 - 8x + 3a - 4$
$= 2(x^2 - 4x + 4 - 4) + 3a - 4$
$= 2(x-2)^2 - 12 + 3a$

$y = 2(x-2)^2 - 12 + 3a$ 의 그래프가 점 $(2a, 8a+5)$ 를 지나므로
$8a + 5 = 2(2a-2)^2 - 12 + 3a$
$8a^2 - 21a - 9 = 0,\ (8a+3)(a-3) = 0$
$\therefore a = -\frac{3}{8}$ 또는 3
그런데 최댓값 $-12 + 3a > -5$ 이므로
$i)\ a = -\frac{3}{8}$ 대입 :
$-12 + 3 \times \left(-\frac{3}{8}\right) = -12 - \frac{9}{8} = -\frac{105}{8} < -5$
$ii) a = 3$ 대입 : $-12 + 3 \times 3 = -12 + 9 = -3 > -5$
따라서 $a = 3$ 이다.

11. 포물선 $y = x^2 + 1$ 위의 한 점P 에서 y 축에 평행인 직선을 그어 직선 $y = x - 1$ 과 만나는 점을 Q 라 할 때 $\overline{\mathrm{PQ}}$ 의 최솟값을 구하면?



① $\frac{1}{2}$　　② $\frac{7}{4}$　　③ $\frac{6}{5}$

④ $\frac{7}{3}$　　⑤ $\frac{5}{2}$

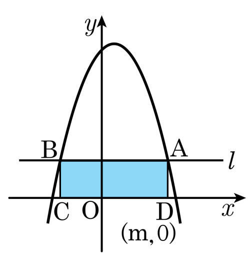
해설

$\overline{\mathrm{PQ}}$ 가 y 축에 평행하므로 점 P, Q 의 x 좌표는 같다. 이때, 점 P 의 좌표를 $(t,\ t^2 + 1)$ 이라고 하면, 점 Q 의 좌표는 $(t,\ t - 1)$

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{PQ}} &= t^2 + 1 - (t - 1)\\ &= t^2 - t + 2\\ &= \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}\end{aligned}$$

따라서 $t = \frac{1}{2}$ 일 때, $\overline{\mathrm{PQ}}$ 의 최솟값은 $\frac{7}{4}$

12. $y=-x^2+x+6$ 의 그래프와 x 축에 평행인 직선 l 이 만나는 두 점 A, B 에서 x 축에 수선을 그어 그 수선의 발을 각각 D, C 라 하고, 점D 의 x 좌표를 m 이라고 할 때, □ABCD 의 둘레의 길이의 최댓값은? $\left(\frac{1}{2}<m<3\right)$



① $\frac{11}{2}$ ② $\frac{31}{4}$ ③ 10 ④ $\frac{49}{4}$ ⑤ $\frac{29}{2}$

해설

$y=-x^2+x+6=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{25}{4}$ 의 점 A 의 좌표는 $(m,\ -m^2+m+6)$ 이다.

직사각형의 가로의 길이는 $2\left(m-\frac{1}{2}\right)$ 이고,

직사각형의 세로의 길이는 $-m^2+m+6$

(□ABCD둘레의 길이)

$=2\left\{2\left(\mathrm{m}-\frac{1}{2}\right)-\mathrm{m}^2+\mathrm{m}+6\right\}$

$=2(2\mathrm{m}-1-\mathrm{m}^2+\mathrm{m}+6)$

$=2(-\mathrm{m}^2+3\mathrm{m}+5)$

$=-2\left(\mathrm{m}-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{29}{2}$

$m=\frac{3}{2}$ 일 때, 최댓값은 $\frac{29}{2}$ 이다.

13. 오차방정식 $x^5 - 3x^4 + x^3 + x^2 - 3x + 1 = 0$의 허근을 α ,β라 할 때, $\alpha + \beta$의 값은?

① 0　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 4

해설

방정식 $x^5 - 3x^4 + x^3 + x^2 - 3x + 1 = 0$에서

$(x+1)(x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 1) = 0$

$\therefore\ x + 1 = 0$ 또는

$x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 1 = 0$

(i) $x + 1 = 0$에서 $x = -1$

(ii) $x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 1 = 0$의 양변을

x^2 으로 나누면

$x^2 - 4x + 5 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$

$\left(s^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 4\left(x + \frac{1}{x}\right) + 5$

$= 0\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4\left(x + \frac{1}{x}\right) + 3 = 0$

이 때, $x + \frac{1}{x} = t$로 치환하면

$t^2 - 4t + 3 = 0,\ (t-1)(t-3) = 0$

$\therefore\ t = 1$ 또는 $t = 3$

①$x + \frac{1}{x} = 1$일 때, $x^2 - x + 1 = 0$

$\therefore\ x = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

②$x + \frac{1}{x} = 3$일 때, $x^2 - 3x + 1 = 0$

$\therefore\ x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

따라서, 주어진 방정식의

두 허근이 $\frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$이므로

두 허근 $\alpha,\ \beta$의 합은

$\alpha + \beta = 1$이다.

14. x, y 에 대한 연립방정식 $\begin{cases} x+y=a+2 \\ xy=\dfrac{a^2+1}{4} \end{cases}$

이 실근을 가질 때, 실수 a 의 범위를 구하면?

① $a \geq -\dfrac{3}{4}$ ② $a > -\dfrac{1}{2}$ ③ $-1 < a < 1$

④ $a \leq \dfrac{2}{3}$ ⑤ $a < 2$

해설

$\begin{cases} x+y=a+2 \\ xy=\dfrac{a^2+1}{4} \end{cases}$

의 해 x, y 를 두 근으로 하는 t 에 대한 이차방정식은 $t^2-(a+2)t+\dfrac{a^2+1}{4}=0$

위의 방정식이 실근을 가지려면

$D=(a+2)^2-4\times\dfrac{a^2+1}{4}\geq 0$

$4a+3\geq 0$

$\therefore\ a\geq -\dfrac{3}{4}$

15. 다음 등식을 만족시키는 0이 아닌 실수의 순서쌍 (a, b)의 개수는?

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{a+b}$$

① 0 개

② 1 개

③ 2 개

④ 각각의 $b(\neq 0)$ 에 대하여 1 개씩 있다.

⑤ 각각의 $b(\neq 0)$ 에 대하여 2 개씩 있다.

해설

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{a+b}$, $\frac{a+b}{ab}=\frac{1}{a+b}$, $(a+b)^2=ab$, $a^2+ab+b^2=0$

$\left(a+\frac{1}{2}b\right)^2+\frac{3}{4}b^2=0$ 실수로서 이 등식을 만족하는 경우는 $a=0,\ b=0$뿐이다.

따라서 0 이 아닌 실수의 순서쌍 $(a,\ b)$ 는 없다.