

1. 이차함수 $y = kx^2 + 4\sqrt{2}x + k + 2$ 의 그래프가 x 축과 서로 다른 두 점에서 만나기 위한 정수 k 의 값들의 합은?

① -3

② -5

③ 7

④ 3

⑤ 5

해설

이차방정식 $kx^2 + 4\sqrt{2}x + k + 2 = 0$ 이

서로 다른 두 실근을 가지므로

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (2\sqrt{2})^2 - k(k+2) > 0$$

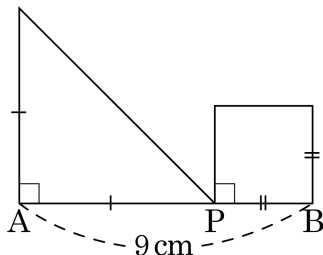
$$8 - k^2 - 2k > 0, (k+4)(k-2) < 0$$

$$\therefore -4 < k < 2$$

따라서 정수 k 는 -3, -2, -1, 0, 1이다.

$$\therefore (-3) + (-2) + (-1) + 0 + 1 = -5$$

2. 길이가 9cm 인 선분 AB 위에 점 P를 잡아서 다음 그림과 같이 직각이등변삼각형과 정사각형을 만들어 넓이의 합이 최소가 되게 할 때, 선분 AP의 길이는?



① 6cm

② 5.5cm

③ 5cm

④ 4.5cm

⑤ 4cm

해설

선분 AP의 길이를 x 라 하고 직각이등변삼각형과 정사각형의 넓이의 합을 S 라 하면

$$S = \frac{1}{2}x^2 + (9-x)^2 = \frac{3}{2}(x-6)^2 + 27$$

따라서 $\overline{AP} = 6$ (cm) 일 때 넓이가 최소이다.

3. 방정식 $x(x+2)(x+4)(x+6)+15=0$ 을 풀면?

① $x = -2$ 또는 $x = -3$ 또는 $x = -2 \pm \sqrt{3}$

② $x = 2$ 또는 $x = 4$ 또는 $x = -3$ 또는 $x = -5$

③ $x = -2 \pm \sqrt{5}$ 또는 $x = -1 \pm \sqrt{6}$

④ $x = -3 \pm \sqrt{5}i$ 또는 $x = -2 \pm \sqrt{6}i$

⑤ $x = -1$ 또는 $x = -5$ 또는 $-3 \pm \sqrt{6}$

해설

$$x(x+6) = x^2 + 6x$$

$$(x+2)(x+4) = x^2 + 6x + 8$$

$$x^2 + 6x = X \text{ 로 놓으면}$$

$$x(x+2)(x+4)(x+6) + 15 = 0$$

$$X(X+8) + 15 = 0,$$

$$X^2 + 8X + 15 = 0$$

$$(X+3)(X+5) = 0$$

$$\therefore X = -3, X = -5$$

$$\textcircled{㉠} : X = -3 \Rightarrow x^2 + 6x + 3 = 0,$$

$$x = -3 \pm \sqrt{9-3} = -3 \pm \sqrt{6}$$

$$\textcircled{㉡} : X = -5 \Rightarrow x^2 + 6x + 5 = 0,$$

$$(x+5)(x+1) = 0, x = -1, -5$$

4. x 에 대한 삼차방정식 $x^3 + 2x^2 + (k+1)x + k = 0$ 의 근이 모두 실근이 되도록 하는 실수 k 의 값의 범위는?

① $-1 \leq k$

② $1 \leq k < 2$

③ $k > 0$

④ $-1 < k \leq \frac{1}{4}$

⑤ $k \leq \frac{1}{4}$

해설

방정식 $x^3 + 2x^2 + (k+1)x + k = 0$ 을 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$(x+1)(x^2 + x + k) = 0$$

이 때, 주어진 방정식의 모든 근이 실근이 되려면

방정식 $x^2 + x + k = 0$ 이 실근을 가져야 하므로

$$D = 1^2 - 4k \geq 0$$

$$\therefore k \leq \frac{1}{4}$$

5. α, β 를 방정식 $x^3 = 1$ 의 두 허근이라 할 때, $\left(\frac{1}{\alpha} + 1\right)^{10} + (\beta^2 + 1)^{10}$ 의 값을 구하면?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$$x^3 - 1 = 0, (x-1)(x^2 + x + 1) = 0 \text{의}$$

두 허근이 α, β 라면,

$x^2 + x + 1 = 0$ 의 두 허근이 α, β 이다.

$$\alpha + \beta = -1, \alpha\beta = 1$$

$$\alpha^2 + \alpha + 1 = 0, \alpha + 1 + \frac{1}{\alpha} = 0,$$

$$\frac{1}{\alpha} + 1 = -\alpha$$

$$\beta^2 + \beta + 1 = 0,$$

$$\beta^2 + 1 = -\beta$$

$$\alpha^3 = 1, \beta^3 = 1$$

$$\left(\frac{1}{\alpha} + 1\right)^{10} + (\beta^2 + 1)^{10}$$

$$= (-\alpha)^{10} + (-\beta)^{10}$$

$$= \alpha^{10} + \beta^{10}$$

$$= (\alpha^3)^3 \alpha + (\beta^3)^3 \beta$$

$$= \alpha + \beta = -1$$

6. 사차방정식 $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ 의 서로 다른 실근은 모두 몇 개인가?

① 0개

② 1개

③ 2개

④ 3개

⑤ 4개

해설

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \Rightarrow (x^2 - 4)(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow (x + 2)(x - 2)(x + 1)(x - 1) = 0$$

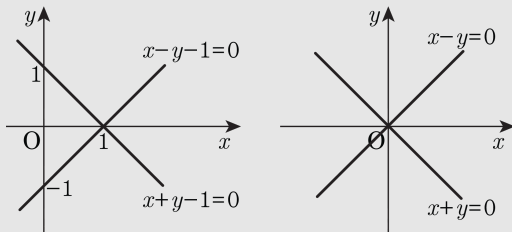
$$\therefore x = 2 \text{ 또는 } x = -2 \text{ 또는 } x = 1 \text{ 또는 } x = -1$$

7. 좌표평면에서 두 영역 $(x+y-1)(x-y-1) = 0$, $x^2 - y^2 = 0$ 을 동시에 만족하는 (x, y) 의 개수는?

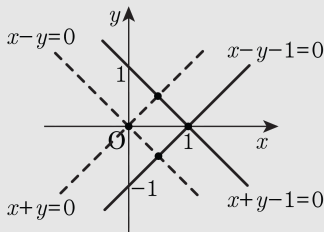
- ① 무한히 많다. ② 0개 ③ 1개
 ④ 2개 ⑤ 4개

해설

두 영역을 좌표평면에 나타내면 다음과 같다.



이것을 하나의 좌표평면에 그리면



위에서 점선과 실선의 교점의 개수는 2개이다.

8. 함수 $y = |x^2 - 2x|$ 의 그래프와 직선 $y = a$ 가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 상수 a 의 값은?

① $-\frac{1}{2}$

② 0

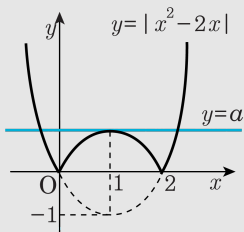
③ $\frac{1}{2}$

④ 1

⑤ 2

해설

함수 $y = |x^2 - 2x|$ 의 그래프를 그리면
아래 그림과 같다.



이때, 직선 $y = a$ 와 서로 다른 세 점에서 만나려면
직선 $y = a$ 가 포물선 $y = -x^2 + 2x$ 의
꼭지점을 지나야 한다.

$$y = -x^2 + 2x = -(x-1)^2 + 1 \text{ 에서}$$

꼭지점의 좌표는 $(1, 1)$ 이므로 $y = 1$
 $\therefore a = 1$

9. $y = ax^2 + bx + c$ 에서 $a > 0$, $b^2 - 4ac > 0$ 일 때, y 의 최댓값, 최솟값에 대한 설명 중 옳은 것은?

① 최댓값, 최솟값이 없다.

② 최솟값이 양수이다.

③ 최솟값이 음수이다.

④ 최댓값이 양수이다.

⑤ 최댓값이 음수이다.

해설

아래로 볼록하고, x 축과 두 점에서 만나므로 최솟값은 음수이다.

10. 이차함수 $y = 2x^2 - 8x + 3a - 4$ 의 최솟값은 -5 보다 크고, 그 그래프가 점 $(2a, 8a + 5)$ 를 지날 때, 상수 a 의 값은?

① -3

② $-\frac{3}{8}$

③ $\frac{3}{8}$

④ 3

⑤ 6

해설

$$\begin{aligned}y &= 2x^2 - 8x + 3a - 4 \\&= 2(x^2 - 4x + 4 - 4) + 3a - 4 \\&= 2(x - 2)^2 - 12 + 3a\end{aligned}$$

$y = 2(x - 2)^2 - 12 + 3a$ 의 그래프가 점 $(2a, 8a + 5)$ 를 지나므로

$$8a + 5 = 2(2a - 2)^2 - 12 + 3a$$

$$8a^2 - 21a - 9 = 0, (8a + 3)(a - 3) = 0$$

$$\therefore a = -\frac{3}{8} \text{ 또는 } 3$$

그런데 최솟값 $-12 + 3a > -5$ 이므로

i) $a = -\frac{3}{8}$ 대입 :

$$-12 + 3 \times \left(-\frac{3}{8}\right) = -12 - \frac{9}{8} = -\frac{105}{8} < -5$$

ii) $a = 3$ 대입 : $-12 + 3 \times 3 = -12 + 9 = -3 > -5$

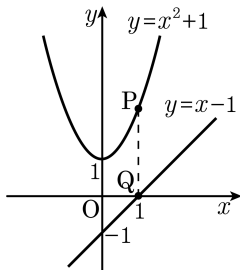
따라서 $a = 3$ 이다.

11. 포물선 $y = x^2 + 1$ 위의 한 점 P 에서 y 축에
평행인 직선을 그어 직선 $y = x - 1$ 과 만나는
점을 Q 라 할 때 $\overline{PQ}$ 의 최솟값을 구하면?

① $\frac{1}{2}$
④ $\frac{7}{3}$

② $\frac{7}{4}$
⑤ $\frac{5}{2}$

③ $\frac{6}{5}$



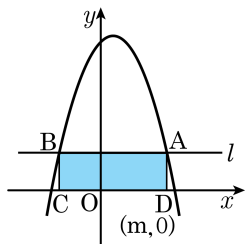
해설

$\overline{PQ}$ 가 y 축에 평행하므로 점 P, Q 의
x 좌표는 같다. 이때, 점 P 의 좌표는
($t, t^2 + 1$) 이라고 하면, 점 Q 의 좌표는 ($t, t - 1$)

$$\begin{aligned}\overline{PQ} &= t^2 + 1 - (t - 1) \\ &= t^2 - t + 2 \\ &= \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}\end{aligned}$$

따라서 $t = \frac{1}{2}$ 일 때, $\overline{PQ}$ 의 최솟값은 $\frac{7}{4}$

12. $y = -x^2 + x + 6$ 의 그래프와 x 축에 평행인 직선 l 이 만나는 두 점 A, B 에서 x 축에 수선을 그어 그 수선의 발을 각각 D, C 라 하고, 점D 의 x 좌표를 m 이라고 할 때, $\square ABCD$ 의 둘레의 길이의 최댓값은? $\left(\frac{1}{2} < m < 3\right)$



① $\frac{11}{2}$

② $\frac{31}{4}$

③ 10

④ $\frac{49}{4}$

⑤ $\frac{29}{2}$

해설

$y = -x^2 + x + 6 = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{25}{4}$ 의 점 A 의 좌표는 $(m, -m^2 + m + 6)$ 이다.

직사각형의 가로 길이는 $2\left(m - \frac{1}{2}\right)$ 이고,

직사각형의 세로 길이는 $-m^2 + m + 6$
($\square ABCD$ 둘레의 길이)

$$= 2\left\{2\left(m - \frac{1}{2}\right) - m^2 + m + 6\right\}$$

$$= 2(2m - 1 - m^2 + m + 6)$$

$$= 2(-m^2 + 3m + 5)$$

$$= -2\left(m - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{29}{2}$$

$m = \frac{3}{2}$ 일 때, 최댓값은 $\frac{29}{2}$ 이다.

13. 오차방정식 $x^5 - 3x^4 + x^3 + x^2 - 3x + 1 = 0$ 의 허근을 α, β 라 할 때, $\alpha + \beta$ 의 값은?

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

방정식 $x^5 - 3x^4 + x^3 + x^2 - 3x + 1 = 0$ 에서

$$(x+1)(x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 1) = 0$$

$\therefore x+1=0$ 또는

$$x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 1 = 0$$

(i) $x+1=0$ 에서 $x=-1$

(ii) $x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 1 = 0$ 의 양변을

x^2 으로 나누면

$$x^2 - 4x + 5 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 4\left(x + \frac{1}{x}\right) + 5$$

$$= 0\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4\left(x + \frac{1}{x}\right) + 3 = 0$$

이 때, $x + \frac{1}{x} = t$ 로 치환하면

$$t^2 - 4t + 3 = 0, (t-1)(t-3) = 0$$

$\therefore t=1$ 또는 $t=3$

$$\textcircled{1} x + \frac{1}{x} = 1 \text{ 일 때, } x^2 - x + 1 = 0$$

$$\therefore x = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

$$\textcircled{2} x + \frac{1}{x} = 3 \text{ 일 때, } x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$\therefore x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

따라서, 주어진 방정식의

두 허근이 $\frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ 이므로

두 허근 α, β 의 합은

$\alpha + \beta = 1$ 이다.

14. x, y 에 대한 연립방정식
$$\begin{cases} x + y = a + 2 \\ xy = \frac{a^2 + 1}{4} \end{cases}$$

이 실근을 가질 때, 실수 a 의 범위를 구하면?

① $a \geq -\frac{3}{4}$

② $a > -\frac{1}{2}$

③ $-1 < a < 1$

④ $a \leq \frac{2}{3}$

⑤ $a < 2$

해설

$$\begin{cases} x + y = a + 2 \\ xy = \frac{a^2 + 1}{4} \end{cases}$$

의 해 x, y 를 두 근으로 하는 t 에 대한 이차방정식은 $t^2 -$

$$(a + 2)t + \frac{a^2 + 1}{4} = 0$$

위의 방정식이 실근을 가지려면

$$D = (a + 2)^2 - 4 \times \frac{a^2 + 1}{4} \geq 0$$

$$4a + 3 \geq 0$$

$$\therefore a \geq -\frac{3}{4}$$

15. 다음 등식을 만족시키는 0이 아닌 실수의 순서쌍 (a, b) 의 개수는?

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a+b}$$

- ① 0 개
- ② 1 개
- ③ 2 개
- ④ 각각의 $b(\neq 0)$ 에 대하여 1 개씩 있다.
- ⑤ 각각의 $b(\neq 0)$ 에 대하여 2 개씩 있다.

해설

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a+b}, \frac{a+b}{ab} = \frac{1}{a+b}, (a+b)^2 = ab, a^2 + ab + b^2 = 0$$

$$\left(a + \frac{1}{2}b\right)^2 + \frac{3}{4}b^2 = 0 \text{ 실수로서 이 등식을 만족하는 경우는}$$

$a = 0, b = 0$ 뿐이다.

따라서 0이 아닌 실수의 순서쌍 (a, b) 는 없다.