1. 이차함수 $y = x^2 - ax + 1$ 의 그래프가 x 축과 서로 다른 두 점에서 만날 때, 실수 a 의 값의 범위는?

① $a < -1$ 또는 $a > 1$　　② $a < -2$ 또는 $a > 2$

③ $1 < a < -1$　　④ $-2 < a < 2$

⑤ $a = -1$ 또는 $a = 1$

해설

이차함수 $y = x^2 - ax + 1$ 의 그래프가
x 축과 서로 다른 두 점에서 만나므로
이차방정식 $x^2 - ax + 1 = 0$ 에서
판별식의 값은 양이다.
즉 $D = a^2 - 4 > 0$
$\therefore$ $a < -2$ 또는 $a > 2$

2. 이차함수 $y = x^2 - 8x + k$ 의 그래프가 x 축과 서로 두 점에서 만날 때, 자연수 k 의 개수는?

① 4 개 ② 8 개 ③ 10 개 ④ 13 개 ⑤ 15 개

해설

그래프가 x 축과 두 점에서 만나려면
$x^2 - 8x + k = 0$ 의 판별식이 0 보다 커야한다.

$\Rightarrow D' = 4^2 - k > 0$

$\Rightarrow k < 16$

$\therefore$ 자연수 k 의 개수 : 15 개

3. 직선 $y = mx - 2$와 포물선 $y = 2x^2 - 3x$가 있다.

(1) 직선이 포물선에 접하도록 m의 값을 정하여라.
(2) 직선이 포물선과 두 점에서 만나도록 m의 값의 범위를 정하여라.
(3) 직선이 포물선과 만나지 않도록 m의 값의 범위를 정하여라

▶ 답:

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: $1,\ -7$

▷ 정답: $m > 1,\ m < -7$

▷ 정답: $-7 < m < 1$

해설

직선과 포물선의 교점의 x좌표를 구하는 식은
$mx - 2 = 2x^2 - 3x$
곧, $2x^2 - (m+3)x + 2 = 0$이고,
$\mathrm{D} = (m+3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = m^2 + 6m - 7$
$= (m-1)(m+7)$
(1) $D = (m-1)(m+7) = 0$
$\therefore\ m = 1,\ -7$
(2) $D = (m-1)(m+7) > 0$
$\therefore\ m > 1,\ m < -7$
(3) $D = (m-1)(m+7) < 0$
$\therefore\ -7 < m < 1$

4. 이차함수 $y = x^2 - 4px + 5 - p$의 그래프가 다음 조건을 만족시키도록 p의 값 또는 p의 값의 범위를 정하여라.

(1) x축과 두 점에서 만날 때
(2) x축과 접할 때
(3) x축과 만나지 않을 때

▶ 답:

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: $p < -\frac{5}{4}$ 또는 $p > 1$

▷ 정답: $p = -\frac{5}{4}$ 또는 $p = 1$

▷ 정답: $-\frac{5}{4} < p < 1$

해설

$y = x^2 - 4px + 5 - p$에서

$\frac{D}{4} = 4p^2 - (5 - p) = 4p^2 + p - 5 = (4p + 5)(p - 1)$

(1) $\frac{D}{4} = (4p + 5)(p - 1) > 0$이므로

$p > 1$ 또는 $p < -\frac{5}{4}$

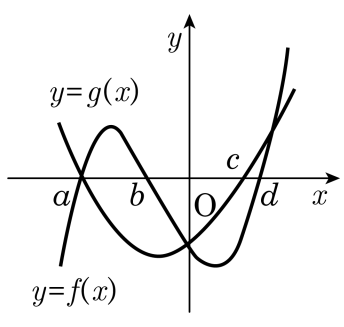
(2) $\frac{D}{4} = (4p + 5)(p - 1) = 0$이므로

$p = 1$ 또는 $p = -\frac{5}{4}$

(3) $\frac{D}{4} = (4p + 5)(p - 1) < 0$이므로

$-\frac{5}{4} < p < 1$

5. 두 개의 방정식 $f(x)=0$, $g(x)=0$ 을 좌표평면에 나타내었더니 다음 그림과 같았다. 이 때, 다음 중 $\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2=0$를 만족하는 것을 고르면?



① a ② a, b ③ a, c

④ a, b, d ⑤ a, b, c, d

해설

$f(x)=0$, $g(x)=0$를 모두 만족하는 것은 a 이다.
($\because$ 실수 a, b 에 대하여 $a^2+b^2=0$ 이면
$a=0$ 이고 $b=0$ 이다.)

6. $y = x^2 - (a^2 - 4a + 3)x + a^2 + 2$ 와 $y = x$ 의 두 교점이 원점에 관하여 대칭이다. 이 때, a 의 값을 구하면?

① 4 ② 2 ③ −4 ④ −2 ⑤ 3

해설

$y = x^2 - (a^2 - 4a + 3)x + a^2 + 2$

$y = x$ 의 교점은 $x^2 - (a^2 - 4a + 3)x + a^2 + 2 = x$

$x^2 - (a^2 - 4a + 4)x + a^2 + 2 = 0$ 의 두 근을 α, β 라면

두 근이 원점에 대칭이므로 중점은 원점이다.

$\therefore \dfrac{\alpha + \beta}{2} = \dfrac{(a-2)^2}{2} = 0$

$\therefore a = 2$

7. x에 대한 방정식 $|x^2-4x-5|=k$가 양의 근 두 개와 음의 근 두 개를 갖도록 하는 실수 k의 값의 범위는?

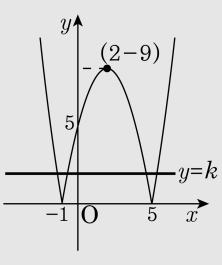
① $0<k<3$ ② $0<k<5$ ③ $3<k<5$

④ $1<k<4$ ⑤ $-2<k<5$

해설

방정식 $|x^2-4x-5|=k$의 실근의 개수는 함수 $y=|x^2-4x-5|$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 개수와 같다.

$y=|x^2-4x-5|=|(x+1)(x-5)|=|(x-2)^2-9|$



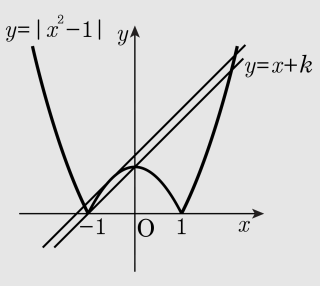
따라서 주어진 방정식이 양의 근 두 개와 음의 근 두 개를 갖도록 하는 실수 k의 값의 범위는 $0<k<5$

8. x에 관한 방정식 $|x^2-1|-x-k=0$이 서로 다른 네 개의 실근을 가질 때, k의 값의 범위를 구하면?

① $1<k<\frac{5}{4}$ ② $1\le k\le\frac{5}{4}$ ③ $-5<k<-\frac{5}{4}$
④ $k<1,\ k>\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{4}{5}<k<1$

해설

$|x^2-1|-x-k=0$을 변형하여 분리하면
$|x^2-1|=x+k,\ y=|x^2-1|,\ y=x+k$
이 두 함수가 4개의 교점을 가지려면
다음그림과 같아야 한다.



$y=-x^2+1,\ y=x+k$가
두 점에서 만나야하므로
$x^2+x+k-1=0$의 판별식 $D>0$이어야 한다.
$D=1-4k+4>0 \quad \therefore\ k<\frac{5}{4}$
또, 직선 $y=x+k$는 점 $(-1,0)$을 지나는 직선 위에 존재해야 하므로
$0<-1+k \quad \therefore\ k>1$
$\therefore\ 1<k<\frac{5}{4}$

9. x에 대한 방정식 $|x^2-4|=2x+m$이 서로 다른 4개의 실근을 가질 때, 실수 m의 값 또는 m의 값의 범위는?

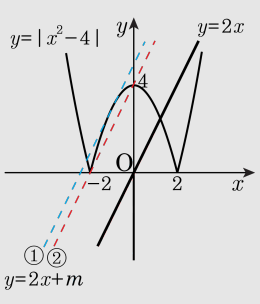
① $-4<m<4$　② $m=-4$

③ $m=4$ 또는 $m=5$　④ $4<m<5$

⑤ $m>5$

해설

$y=|x^2-4|$와 $y=2x+m$을 그래프로 나타내면



서로 다른 4개의 실근을 가지는 경우는 ①, ②번 그래프와 같다.

① $-x^2+4=y$와 $2x+m=y$이 접하는 경우

$-x^2+4=2x+m$

$x^2+2x+m-4=0$

$\frac{D}{4}=1-m+4=0$

$\therefore\ m=5$

② $y=2x+m$이 $(-2,\ 0)$을 지나는 경우

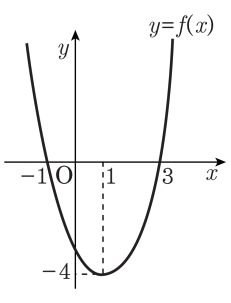
$0=-4+m$

$\therefore\ m=4$

구하는 식은 ①, ②번 그래프 사이이므로

$\therefore\ 4<m<5$

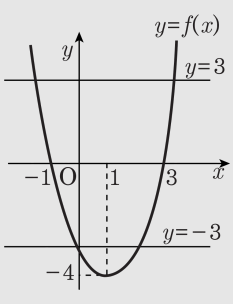
10. 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 방정식 $f\left(|f(x)|\right)=0$ 의 실근의 개수는?



① 2 개 ② 4 개 ③ 6 개
④ 8 개 ⑤ 0 개

해설

$|f(x)|=t\ (t\geq 0)$ 로 놓으면
$f(|f(x)|)=0 \Leftrightarrow f(t)=0$
$\therefore\ t=3(\because\ t\geq 0)$
$\therefore\ |f(x)|=3$
ⅰ) $f(x)=3$ 일 때
$y=f(x)$ 와 $y=3$ 의 교점의 개수가 실근의 개수이다.



$\therefore$ 2 개
ⅱ) $f(x)=-3$ 일 때
$y=f(x)$ 와 $y=-3$ 의 교점의 개수가 실근의 개수이다.
$\therefore$ 2 개
따라서 방정식 ⅰ), ⅱ) 에 의해 $f(|f(x)|)=0$ 의 실근의 개수는 4 개다.