

1. 지호네 반 학생 40 명의 몸무게의 평균은 60 kg 이다. 두명의 학생이 전학을 간 후 나머지 38 명의 몸무게의 평균이 59.5 kg 이 되었을 때, 전학을 간 두 학생의 몸무게의 평균은?

① 62.5 kg

② 65.5 kg

③ 67 kg

④ 69 kg

⑤ 69.5 kg

해설

40 명의 몸무게의 총합 : $60 \times 40 = 2400$ (kg)

전학생 2명을 뺀 38 명의 몸무게의 총합 : $59.5 \times 38 = 2261$ (kg)

전학생 2명의 몸무게의 총합 : $2400 - 2261 = 139$ (kg)

$\therefore$ (전학생 2명의 몸무게의 평균) = $\frac{139}{2} = 69.5$ (kg)

2. 세 수 x, y, z 의 평균과 분산이 각각 4, 2 일 때, x^2, y^2, z^2 의 평균은?

- ① $\frac{50}{3}$ ② $\frac{51}{3}$ ③ $\frac{52}{3}$ ④ $\frac{53}{3}$ ⑤ 18

해설

세 수 x, y, z 의 평균이 4 이므로

$$\frac{x+y+z}{3} = 4$$

$$\therefore x+y+z = 12 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

또한, x, y, z 의 분산이 2 이므로

$$\frac{(x-4)^2 + (y-4)^2 + (z-4)^2}{3} = 2$$

$$(x-4)^2 + (y-4)^2 + (z-4)^2 = 6$$

$$x^2 - 8x + 16 + y^2 - 8y + 16 + z^2 - 8z + 16 = 6$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 8(x+y+z) + 48 = 6$$

위의 식에 $\textcircled{1}$ 을 대입하면

$$x^2 + y^2 + z^2 - 8 \times 12 + 48 = 6$$

$$\therefore x^2 + y^2 + z^2 = 54 \text{ 따라서 } x^2, y^2, z^2 \text{ 의 평균은}$$

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{3} = \frac{54}{3} = 18 \text{ 이다.}$$

3. 네 개의 변량 4, 6, a , b 의 평균이 5 이고, 분산이 3 일 때, 7, a^2 , b^2 , 9 의 평균은?

- ① 16 ② 17 ③ 19 ④ 21 ⑤ 23

해설

변량 4, 6, a , b 의 평균이 5 이므로

$$\frac{4+6+a+b}{4} = 5, \quad a+b+10 = 20$$

$$\therefore a+b = 10 \quad \dots\dots\textcircled{\text{㉠}}$$

또한, 분산이 3 이므로

$$\frac{(4-5)^2 + (6-5)^2 + (a-5)^2 + (b-5)^2}{4} = 3$$

$$\frac{1+1+a^2-10a+25+b^2-10b+25}{4} = 3$$

$$\frac{a^2+b^2-10(a+b)+52}{4} = 3$$

$$a^2+b^2-10(a+b)+52 = 12$$

$$\therefore a^2+b^2-10(a+b) = -40 \quad \dots\dots\textcircled{\text{㉡}}$$

②의 식에 ①을 대입하면

$$\therefore a^2+b^2 = 10(a+b) - 40 = 10 \times 10 - 40 = 60$$

따라서 7, a^2 , b^2 , 9 의 평균은

$$\frac{7+a^2+b^2+9}{4} = \frac{16+60}{4} = 19 \text{이다.}$$

4. 세 수 x, y, z 의 평균과 분산이 각각 5, 3 일 때, $\frac{1}{2}x^2, \frac{1}{2}y^2, \frac{1}{2}z^2$ 의 평균은?

- ① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

해설

세 수 x, y, z 의 평균이 5 이므로

$$\frac{x+y+z}{3} = 5$$

$$\therefore x+y+z = 15 \dots\dots\textcircled{1}$$

또한, x, y, z 의 분산이 3 이므로

$$\frac{(x-5)^2 + (y-5)^2 + (z-5)^2}{3} = 3$$

$$(x-5)^2 + (y-5)^2 + (z-5)^2 = 9$$

$$x^2 - 10x + 25 + y^2 - 10y + 25 + z^2 - 10z + 25 = 9$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 10(x+y+z) + 75 = 9$$

위의 식에 $\textcircled{1}$ 을 대입하면

$$x^2 + y^2 + z^2 - 10 \times 15 + 75 = 9$$

$$\therefore x^2 + y^2 + z^2 = 84$$

따라서 $\frac{1}{2}x^2, \frac{1}{2}y^2, \frac{1}{2}z^2$ 의 평균은

$$\frac{1}{3} \left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2} \right) = \frac{1}{6}(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{84}{6} = 14 \text{ 이다.}$$

5. 다섯 개의 변량 5, 6, x , y , 7 의 평균이 8 이고, 분산이 5 일 때,
 $2, 3, \frac{1}{5}x^2, \frac{1}{5}y^2$ 의 평균은?

① 5 ② 7 ③ 9 ④ 11 ⑤ 13

해설

다섯 개의 변량 5, 6, x , y , 7 의 평균이 8 이므로

$$\frac{5+6+x+y+7}{5}=8, \quad x+y+18=40$$

$$\therefore x+y=22 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

또, 분산이 5 이므로

$$\frac{(5-8)^2+(6-8)^2+(x-8)^2+(y-8)^2}{5}+\frac{(7-8)^2}{5}=5$$

$$\frac{9+4+x^2-16x+64+y^2-16y+64+1}{5}=5$$

$$\frac{x^2+y^2-16(x+y)+142}{5}=5$$

$$x^2+y^2-16(x+y)+142=25$$

$$\therefore x^2+y^2-16(x+y)=-117 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

㉡의 식에 ㉠을 대입하면

$$x^2+y^2=16(x+y)-117=16 \times 22-117$$

$$\therefore x^2+y^2=235$$

따라서 $1, 2, \frac{1}{5}x^2, \frac{1}{5}y^2$ 의 평균은

$$\frac{1}{4}\left(2+3+\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{5}\right)=\frac{1}{4}\left\{5+\frac{1}{5}(x^2+y^2)\right\}=13 \text{ 이다.}$$

6. 세 수 a, b, c 의 평균이 2, 분산이 4 일 때, 변량 $a+3, b+3, c+3$ 의 평균과 분산을 차례대로 나열한 것은?

- ① 2, 5 ② 3, 5 ③ 4, 4 ④ 5, 4 ⑤ 6, 5

해설

세 수 a, b, c 의 평균이 2 이므로

$$\frac{a+b+c}{3} = 2$$

$$\therefore a+b+c = 6 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

또한, a, b, c 의 분산이 4 이므로

$$\frac{(a-2)^2 + (b-2)^2 + (c-2)^2}{3} = 4$$

$$(a-2)^2 + (b-2)^2 + (c-2)^2 = 12$$

$$a^2 - 4a + 4 + b^2 - 4b + 4 + c^2 - 4c + 4 = 12$$

$$a^2 + b^2 + c^2 - 4(a+b+c) + 12 = 12$$

위의 식에 $\textcircled{1}$ 을 대입하면

$$a^2 + b^2 + c^2 - 4 \times 6 + 12 = 12$$

$$\therefore a^2 + b^2 + c^2 = 24$$

한편, $a+3, b+3, c+3$ 의 평균은

$$\frac{(a+3) + (b+3) + (c+3)}{3} = \frac{(a+b+c) + 9}{3}$$

$$= \frac{6+9}{3} = 5$$

따라서 분산은

$$\frac{(a+3-5)^2 + (b+3-5)^2 + (c+3-5)^2}{3}$$

$$= \frac{(a-2)^2 + (b-2)^2 + (c-2)^2}{3}$$

$$= \frac{a^2 + b^2 + c^2 - 4(a+b+c) + 4 \times 3}{3}$$

$$= \frac{24 - 4 \times 6 + 12}{3} = \frac{12}{3} = 4$$

7. 자연수 a, b, c 에 대하여 가로 길이, 세로 길이, 높이가 각각 $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$ 인 직육면체의 부피가 $6\sqrt{5}$ 일 때, 이 직육면체의 겉넓이의 최댓값을 구하여라. (단, $a \leq b \leq c$)

① $1 + 2\sqrt{5}$

② $2 + \sqrt{3}$

③ $2 + 12\sqrt{3}$

④ $2 + 21\sqrt{5}$

⑤ $2 + 24\sqrt{5}$

해설

부피는 $\sqrt{abc} = 6\sqrt{5} = \sqrt{180}$

$\therefore abc = 180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$

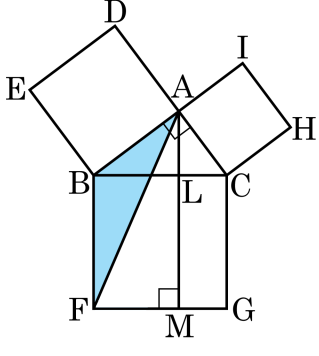
한편 직육면체의 겉넓이는

$2(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca})$ 이고

$\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}$ 가 최댓값을 갖기 위한 자연수 a, b, c 의 순서쌍은 $(1, 1, 180)$ 이므로

$$\begin{aligned}\therefore (\text{직육면체의 겉넓이}) &= 2(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}) \\ &= 2(1 + \sqrt{180} + \sqrt{180}) \\ &= 2(1 + 6\sqrt{5} + 6\sqrt{5}) \\ &= 2(1 + 12\sqrt{5}) \\ &= 2 + 24\sqrt{5}\end{aligned}$$

8. 다음 그림은 $\angle A = 90^\circ$ 인 직각삼각형 ABC에서 세변을 각각 한 변으로 하는 정사각형을 그린 것이다. $\triangle ABF$ 와 넓이가 같지 않은 삼각형은?

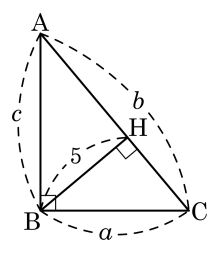


- ① $\triangle EBC$
- ② $\triangle BLF$
- ③ $\triangle AFM$
- ④ $\triangle EAB$
- ⑤ $\triangle FMB$

해설

- ① $\triangle EBC$, SAS 합동
- ② $\triangle BLF$, 밑변과 높이가 같은 삼각형
- ④ $\triangle EAB$, $\triangle BLF$ 와 넓이가 같다.
- ⑤ $\triangle FMB$, 밑변과 높이가 같은 삼각형

9. 다음 그림과 같이 $\angle B = 90^\circ$ 인 직각삼각형 ABC의 점 B에서 $\overline{AC}$ 에 내린 수선의 발을 H라고 하고, $a + b + c = 10$, $\overline{BH} = 5$ cm 일 때, 삼각형 ABC의 넓이를 구하면?



- ① 25 cm^2 ② $\frac{25}{2} \text{ cm}^2$ ③ $\frac{25}{3} \text{ cm}^2$
 ④ 5 cm^2 ⑤ 10 cm^2

해설

$(a + c) = 10 - b$ 이므로 양변 제곱을 하면 $(a + c)^2 = (10 - b)^2$
 $a^2 + 2ac + c^2 = b^2 - 20b + 100$ 피타고라스 정리에 의해서
 $b^2 = a^2 + c^2$ 을 이용하면
 $b^2 + 2ac = b^2 - 20b + 100$ 이므로
 $2ac + 20b = 100 \cdots (1)$
 또한 $\overline{AB} \times \overline{BC} = \overline{AC} \times \overline{BH}$ 에서
 $5b = ac \cdots (2)$
 (1)에 (2)를 대입하면
 $30b = 100$ 에서
 $b = \frac{100}{30}$
 따라서 $\triangle ABC$ 의 넓이는
 $\frac{1}{2} \times 5b = \frac{50}{6} = \frac{25}{3} (\text{cm}^2)$