1. 지호네 반 학생 40 명의 몸무게의 평균은 60 kg 이다. 두명의 학생이 전학을 간 후 나머지 38 명의 몸무게의 평균이 59.5 kg 이 되었을 때, 전학을 간 두 학생의 몸무게의 평균은?

① 62.5 kg ② 65.5 kg ③ 67 kg

④ 69 kg ⑤ 69.5 kg

해설

40 명의 몸무게의 총합 : $60 \times 40 = 2400(\mathrm{kg})$

전학생 2 명을 뺀 38 명의 몸무게의 총합 : $59.5 \times 38 = 2261(\mathrm{kg})$

전학생 2 명의 몸무게의 총합 : $2400 - 2261 = 139(\mathrm{kg})$

$\therefore$ (전학생 2 명의 몸무게의 평균)$= \dfrac{139}{2} = 69.5(\mathrm{kg})$

2. 세 수 x, y, z 의 평균과 분산이 각각 4, 2 일 때, x^2, y^2, z^2 의 평균은?

① $\frac{50}{3}$　② $\frac{51}{3}$　③ $\frac{52}{3}$　④ $\frac{53}{3}$　⑤ 18

해설

세 수 x, y, z 의 평균이 4 이므로

$\frac{x+y+z}{3} = 4$

$\therefore\ x+y+z = 12 \quad \cdots\cdots$ ㉠

또한, x, y, z 의 분산이 2 이므로

$\frac{(x-4)^2+(y-4)^2+(z-4)^2}{3} = 2$

$(x-4)^2+(y-4)^2+(z-4)^2 = 6$

$x^2-8x+16+y^2-8y+16+z^2-8z+16 = 6$

$x^2+y^2+z^2-8(x+y+z)+48 = 6$

위의 식에 ㉠을 대입하면

$x^2+y^2+z^2-8\times 12+48 = 6$

$\therefore x^2+y^2+z^2 = 54$ 따라서 x^2, y^2, z^2 의 평균은

$\frac{x^2+y^2+z^2}{3} = \frac{54}{3} = 18$ 이다.

3. 네 개의 변량 4, 6, a, b 의 평균이 5 이고, 분산이 3 일 때, 7, a^2, b^2, 9 의 평균은?

① 16　　② 17　　③ 19　　④ 21　　⑤ 23

해설

변량 4, 6, a, b 의 평균이 5 이므로

$\dfrac{4+6+a+b}{4}=5,\ \ a+b+10=20$

$\therefore a+b=10\quad \cdots\cdots ㉠$

또한, 분산이 3 이므로

$\dfrac{(4-5)^2+(6-5)^2+(a-5)^2+(b-5)^2}{4}=3$

$\dfrac{1+1+a^2-10a+25+b^2-10b+25}{4}=3$

$\dfrac{a^2+b^2-10(a+b)+52}{4}=3$

$a^2+b^2-10(a+b)+52=12$

$\therefore\ a^2+b^2-10(a+b)=-40\quad \cdots\cdots ㉡$

㉡의 식에 ㉠을 대입하면

$\therefore\ a^2+b^2=10(a+b)-40=10\times10-40=60$

따라서 7, a^2, b^2, 9 의 평균은

$\dfrac{7+a^2+b^2+9}{4}=\dfrac{16+60}{4}=19$ 이다.

4. 세 수 x, y, z 의 평균과 분산이 각각 5, 3 일 때, $\frac{1}{2}x^2$, $\frac{1}{2}y^2$, $\frac{1}{2}z^2$ 의 평균은?

① 12　② 14　③ 16　④ 18　⑤ 20

해설

세 수 x, y, z 의 평균이 5 이므로

$\frac{x+y+z}{3} = 5$

$\therefore x+y+z = 15 \cdots\cdots$ ㉠

또한, x, y, z 의 분산이 3 이므로

$\frac{(x-5)^2+(y-5)^2+(z-5)^2}{3} = 3$

$(x-5)^2+(y-5)^2+(z-5)^2 = 9$

$x^2-10x+25+y^2-10y+25+z^2-10z+25 = 9$

$x^2+y^2+z^2-10(x+y+z)+75 = 9$

위의 식에 ㉠을 대입하면

$x^2+y^2+z^2-10\times 15+75 = 9$

$\therefore x^2+y^2+z^2 = 84$

따라서 $\frac{1}{2}x^2$, $\frac{1}{2}y^2$, $\frac{1}{2}z^2$ 의 평균은

$\frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{2}\right) = \frac{1}{6}(x^2+y^2+z^2) = \frac{84}{6} = 14$ 이다.

5. 다섯 개의 변량 5, 6, x, y, 7 의 평균이 8 이고, 분산이 5 일 때, 2, 3, $\frac{1}{5}x^2$, $\frac{1}{5}y^2$ 의 평균은?

① 5 ② 7 ③ 9 ④ 11 ⑤ 13

해설

다섯 개의 변량 5, 6, x, y, 7 의 평균이 8 이므로

$\frac{5+6+x+y+7}{5}=8,\quad x+y+18=40$

$\therefore x+y=22 \quad \cdots\cdots$ ㉠

또, 분산이 5 이므로

$\frac{(5-8)^2+(6-8)^2+(x-8)^2+(y-8)^2}{5}+\frac{(7-8)^2}{5}=5$

$\frac{9+4+x^2-16x+64+y^2-16y+64+1}{5}=5$

$\frac{x^2+y^2-16(x+y)+142}{5}=5$

$x^2+y^2-16(x+y)+142=25$

$\therefore x^2+y^2-16(x+y)=-117 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉡의 식에 ㉠을 대입하면

$x^2+y^2=16(x+y)-117=16\times 22-117$

$\therefore\ x^2+y^2=235$

따라서 1, 2, $\frac{1}{5}x^2$, $\frac{1}{5}y^2$ 의 평균은

$\frac{1}{4}\left(2+3+\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{5}\right)=\frac{1}{4}\left\{5+\frac{1}{5}(x^2+y^2)\right\}=13$ 이다.

6. 세 수 $a,\ b,\ c$ 의 평균이 2 , 분산이 4 일 때, 변량 $a+3,\ b+3,\ c+3$ 의 평균과 분산을 차례대로 나열한 것은?

① 2, 5　② 3, 5　③ 4, 4　④ 5, 4　⑤ 6, 5

해설

세 수 $a,\ b,\ c$ 의 평균이 2 이므로

$\dfrac{a+b+c}{3}=2$

$\therefore a+b+c=6 \ \cdots\cdots$ ㉠

또한, $a,\ b,\ c$ 의 분산이 4 이므로

$\dfrac{(a-2)^2+(b-2)^2+(c-2)^2}{3}=4$

$(a-2)^2+(b-2)^2+(c-2)^2=12$

$a^2-4a+4+b^2-4b+4+c^2-4c+4=12$

$a^2+b^2+c^2-4(a+b+c)+12=12$

위의 식에 ㉠을 대입하면

$a^2+b^2+c^2-4\times6+12=12$

$\therefore a^2+b^2+c^2=24$

한편, $a+3,\ b+3,\ c+3$ 의 평균은

$\dfrac{(a+3)+(b+3)+(c+3)}{3}=\dfrac{(a+b+c)+9}{3}$

$=\dfrac{6+9}{3}=5$

따라서 분산은

$\dfrac{(a+3-5)^2+(b+3-5)^2+(c+3-5)^2}{3}$

$=\dfrac{(a-2)^2+(b-2)^2+(c-2)^2}{3}$

$=\dfrac{a^2+b^2+c^2-4(a+b+c)+4\times3}{3}$

$=\dfrac{24-4\times6+12}{3}=\dfrac{12}{3}=4$

7. 자연수 a, b, c에 대하여 가로의 길이, 세로의 길이, 높이가 각각 $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$ 인 직육면체의 부피가 $6\sqrt{5}$일 때, 이 직육면체의 겉넓이의 최댓값을 구하여라. (단, $a \le b \le c$)

① $1+2\sqrt{5}$ ② $2+\sqrt{3}$ ③ $2+12\sqrt{3}$
④ $2+21\sqrt{5}$ ⑤ $2+24\sqrt{5}$

해설

부피는 $\sqrt{abc}=6\sqrt{5}=\sqrt{180}$

$\therefore\ abc=180=2^2\times3^2\times5$

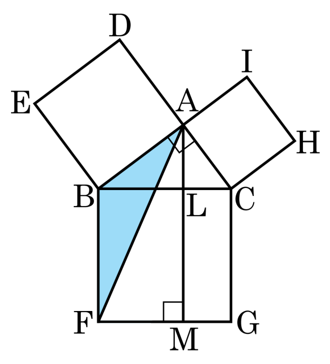
한편 직육면체의 겉넓이는

$2(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca})$ 이고

$\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}$가 최댓값을 갖기 위한 자연수 a, b, c의 순서쌍은 $(1,\ 1,\ 180)$ 이므로

$$\begin{aligned}\therefore \text{(직육면체의 겉넓이)} &= 2(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca})\\ &= 2(1+\sqrt{180}+\sqrt{180})\\ &= 2(1+6\sqrt{5}+6\sqrt{5})\\ &= 2(1+12\sqrt{5})\\ &= 2+24\sqrt{5}\end{aligned}$$

8. 다음 그림은 $\angle A = 90°$인 직각삼각형 ABC에서 세변을 각각 한 변으로 하는 정사각형을 그린 것이다. $\triangle$ABF와 넓이가 같지 <u>않은</u> 삼각형은?



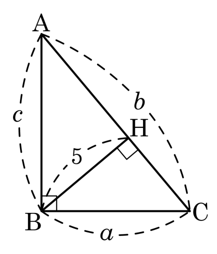
① $\triangle$EBC　　② $\triangle$BLF　　③ $\triangle$AFM

④ $\triangle$EAB　　⑤ $\triangle$FMB

해설

① $\triangle$EBC, SAS 합동
② $\triangle$BLF, 밑변과 높이가 같은 삼각형
④ $\triangle$EAB, $\triangle$BLF와 넓이가 같다.
⑤ $\triangle$FMB, 밑변과 높이가 같은 삼각형

9. 다음 그림과 같이 $\angle B = 90°$ 인 직각삼각형 ABC 의 점 B 에서 $\overline{AC}$ 에 내린 수선의 발을 H 라 하고, $a + b + c = 10$, $\overline{BH} = 5\,\text{cm}$ 일 때, 삼각형 ABC 의 넓이를 구하면?



① $25\,\text{cm}^2$　② $\frac{25}{2}\,\text{cm}^2$　③ $\frac{25}{3}\,\text{cm}^2$

④ $5\,\text{cm}^2$　⑤ $10\,\text{cm}^2$

해설

$(a+c) = 10 - b$ 이므로 양변 제곱을 하면 $(a+c)^2 = (10-b)^2$

$a^2 + 2ac + c^2 = b^2 - 20b + 100$ 피타고라스 정리에 의해서

$b^2 = a^2 + c^2$ 을 이용하면

$b^2 + 2ac = b^2 - 20b + 100$ 이므로

$2ac + 20b = 100 \cdots (1)$

또한 $\overline{AB} \times \overline{BC} = \overline{AC} \times \overline{BH}$ 에서

$5b = ac \cdots (2)$

(1) 에 (2) 를 대입하면

$30b = 100$ 에서

$b = \frac{100}{30}$

따라서 $\triangle ABC$ 의 넓이는

$\frac{1}{2} \times 5b = \frac{50}{6} = \frac{25}{3}(\text{cm}^2)$