1. 다음 중 식의 전개가 바르지 <u>않은</u> 것을 고르면?

① $(1-x)(1+x+x^2)=1-x^3$

② $(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)=x^4+x^2y^2+y^4$

③ $(x-3)(x-2)(x+1)(x+2)=x^4-8x^2+12$

④ $(a-b)(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)=a^8-b^8$

⑤ $(a+b-c)(a-b+c)=a^2-b^2-c^2+2bc$

해설

$(x-3)(x-2)(x+1)(x+2)$
$=(x^2-x-6)(x^2-x-2)$
$x^2-x=Y$라 놓자.

$$\begin{aligned}(Y-6)(Y-2)&=Y^2-8Y+12\\&=(x^2-x)^2-8(x^2-x)+12\\&=x^4-2x^3-7x^2+8x+12\end{aligned}$$

2. 두 이차식의 합이 $2x^2 - x - 6$이고, 최소공배수가 $x^3 + x^2 - 4x - 4$일 때, 두 이차식의 최대공약수는?

① $x-1$ ② $x+1$ ③ $x-2$ ④ $x+2$ ⑤ $x+3$

해설

최대공약수는 합과 최소공배수의 공통인수

$2x^2 - x - 6 = (x-2)(2x+3)$

$x^3 + x^2 - 4x - 4 = (x-2)(x+2)(x+1)$

3. 연산 $*$를 $a*b=ab+2(a+b)$라 정의할 때, 다음 방정식의 두 근을 α, β라 한다. 이때, $|\alpha-\beta|$의 값은?

$$(3x*x)-(3*x)+\{(-1)*2\}=0$$

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

연산 $*$ 의 정의에 따라서

$3x*x=3x\cdot x+2(3x+x)=3x^2+8x$, $3*x=3\cdot x+2(3+x)=5x+6$,

$-1*2=(-1)\cdot 2+2(-1+2)=-2+2=0$

주어진 식은 $3x^2+8x-(5x+6)+0=0$

$3x^2+3x-6=0$ 에서 $3(x+2)(x-1)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=1$ $\quad\therefore \ |\alpha-\beta|=3$

4. 이차방정식 $x^2+2|x|-8=0$의 해는?

① $-2,\ 4$ ② $-2,\ 2$ ③ $-4,\ 4$

④ $-4,\ 2$ ⑤ $-4,\ -2,\ 2,\ 4$

해설

$x^2+2|x|-8=0$에서

i) $x>0$일 때,

$x^2+2x-8=0,\ (x+4)(x-2)-0$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=2$

그런데 $x>0$이므로 $x=2$

ii) $x<0$일 때,

$x^2+2x-8=0,\ (x-4)(x+2)=0$

$\therefore x=4$ 또는 $x=-2$

그런데 $x<0$이므로 $x=-2$

i), ii)에서 구하는 해는 $-2,\ 2$

5. 이차방정식 $x^2 - mx + n = 0$의 두 근을 α, β라고 할 때, 이차방정식 $x^2 - 4x + 1 = 0$의 두 근은 $\alpha + \beta$, $\alpha\beta$이다. 이 때, $m^3 + n^3$의 값은?

① 36 ② 40 ③ 42 ④ 45 ⑤ 52

해설

$x^2 - mx + n = 0$의 두 근이 α, β이므로
$\alpha + \beta = m, \ \alpha\beta = n$
$x^2 - 4x + 1 = 0$의 두 근이 $\alpha + \beta$, $\alpha\beta$이므로
두 근의 합 $(\alpha + \beta) + (\alpha\beta) = m + n = 4$
두 근의 곱 $(\alpha + \beta)\alpha\beta = mn = 1$

$$\therefore m^3 + n^3 = (m + n)^3 - 3mn(m + n)$$
$$= 64 - 12 = 52$$

6. 다음 중 옳지 않은 것은?

① $a > b,\ b > c$ 이면 $a > c$

② $a > b$ 이면 $a + c > b + c,\ a - c > b - c$

③ $a > b,\ c > 0$ 이면 $ac > bc,\ \dfrac{a}{c} > \dfrac{b}{c}$

④ $a > b,\ c < 0$ 이면 $ac < bc,\ \dfrac{a}{c} < \dfrac{b}{c}$

⑤ $a > b > 0$ 이면 $\dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$

해설

⑤ 반례 $a = 2,\ b = 1 \Rightarrow \dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{b} = 1$

$\therefore\ \dfrac{1}{2} < 1$

7. 연립부등식 $\begin{cases} 0.3x - 0.5 \leq 0.4 \\ x - 3 > -2(9 + x) \end{cases}$ 를 만족하는 정수 x 는 모두 몇 개인가?

① 9 개 ② 8 개 ③ 7 개 ④ 6 개 ⑤ 5 개

해설

$$\begin{cases} 0.3x - 0.5 \leq 0.4 \\ x - 3 > -2(9 + x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x - 5 \leq 4 \\ x - 3 > -18 - 2x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ x > -5 \end{cases}$$

$\therefore\ -5 < x \leq 3$

8. 다항식 $f(x)$를 x^2-3x+2로 나눌 때의 나머지가 3이고, x^2-4x+3으로 나눌 때의 나머지가 $3x$일 때, $f(x)$를 x^2-5x+6으로 나눌 때의 나머지는?

① 3 ② $3x+3$ ③ $3x-3$

④ $6x-9$ ⑤ $9x+6$

해설

$f(x)=(x-2)(x-1)Q(x)+3$

$f(x)=(x-3)(x-1)Q'(x)+3x$

$\therefore\ f(2)=3,\ f(3)=9$ $f(x)$를 x^2-5x+6으로 나눌 때의 나머지를 $ax+b$라 하면

$f(x)=(x-2)(x-3)Q''(x)+ax+b$

$f(2)=2a+b=3,\ f(3)=3a+b=9$

$a=6,\ b=-9$

$\therefore$ 나머지는 $6x-9$

9. 1999개의 다항식 x^2-2x-1, x^2-2x-2, $\cdots$, $x^2-2x-1999$ 중에서 계수가 정수인 일차식의 곱으로 인수분해 되는 것은 모두 몇 개인가?

① 43개 ② 44개 ③ 45개 ④ 46개 ⑤ 47개

해설

$x^2-2x-n=(x+a)(x-b)$ (a, b는 자연수)라 하면 ($1 \le n \le 1999$ 인 자연수)

$ab=n$, $a=b-2$

$\therefore n=1\cdot3,\ 2\cdot4,\ 3\cdot5,\ \cdots,\ 43\cdot45(=1935)$의 43개

10. $z^2 = \sqrt{5}+i$ 를 만족하는 복소수 z 에 대하여 $z\bar{z}$ 의 값은? (단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수)

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 2 ④ $\sqrt{5}$ ⑤ $\sqrt{6}$

해설

$z = x+yi$ $(x,\ y$ 는 실수$)$ 로 놓으면 $(x+yi)^2 = \sqrt{5}+i$
$x^2-y^2+2xyi = \sqrt{5}+i$ 에서 복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$x^2-y^2 = \sqrt{5},\ 2xy=1$
$z\bar{z} = (x+yi)(x-yi) = x^2+y^2$ 이므로

$$(x^2+y^2)^2 = (x^2-y^2)^2+4x^2y^2 = (\sqrt{5})^2+4\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 6$$

$x^2+y^2>0$ 이므로 $x^2+y^2 = \sqrt{6}$
$\therefore\ z\bar{z} = \sqrt{6}$

해설

$z^2 = \sqrt{5}+i\ ,\ \overline{z^2} = \sqrt{5}-i$
$z^2\overline{z^2} = (\sqrt{5}+i)(\sqrt{5}-i) = 6$
$z\bar{z} = \pm\sqrt{6}$
$z\bar{z} \ge 0$ 이므로 $z\bar{z} = \sqrt{6}$

11. n이 자연수이고 α_n, β_n이 이차방정식 $(n+\sqrt{n(n-1)})x^2-\sqrt{n}x-\sqrt{n}=0$의 두 실근일 때, $(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{49})+(\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_{49})$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 6 ⑤ 7

해설

$$\left(n+\sqrt{n(n-1)}\right)x^2-\sqrt{n}x-\sqrt{n}=0$$

근과 계수의 관계에 따라

$$\alpha_n+\beta_n=\frac{\sqrt{n}}{n+\sqrt{n(n-1)}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}=\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$$

$$\alpha_1+\beta_1=\sqrt{1}-0$$

$$\alpha_2+\beta_2=\sqrt{2}-\sqrt{1}$$

$$\vdots$$

$$\alpha_{49}+\beta_{49}=\sqrt{49}-\sqrt{48}$$

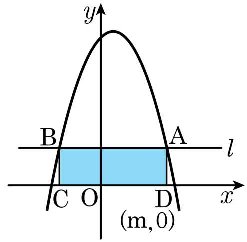
$$(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{49})+(\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_{49})$$

$$=(\alpha_1+\beta_1)+(\alpha_2+\beta_2)+\cdots+(\alpha_{49}+\beta_{49})$$

$$=1+(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{49}-\sqrt{48})$$

$$=\sqrt{49}=7$$

12. $y=-x^2+x+6$ 의 그래프와 x 축에 평행인 직선 l 이 만나는 두 점 A, B 에서 x 축에 수선을 그어 그 수선의 발을 각각 D, C 라 하고, 점D 의 x 좌표를 m 이라고 할 때, □ABCD 의 둘레의 길이의 최댓값은? $\left(\frac{1}{2}<m<3\right)$



① $\frac{11}{2}$ ② $\frac{31}{4}$ ③ 10 ④ $\frac{49}{4}$ ⑤ $\frac{29}{2}$

해설

$y=-x^2+x+6=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{25}{4}$ 의 점 A 의 좌표는 $(m,\ -m^2+m+6)$ 이다.

직사각형의 가로의 길이는 $2\left(m-\frac{1}{2}\right)$ 이고,

직사각형의 세로의 길이는 $-m^2+m+6$

(□ABCD둘레의 길이)

$=2\left\{2\left(\mathrm{m}-\frac{1}{2}\right)-\mathrm{m}^2+\mathrm{m}+6\right\}$

$=2(2\mathrm{m}-1-\mathrm{m}^2+\mathrm{m}+6)$

$=2(-\mathrm{m}^2+3\mathrm{m}+5)$

$=-2\left(\mathrm{m}-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{29}{2}$

$m=\frac{3}{2}$ 일 때, 최댓값은 $\frac{29}{2}$ 이다.

13. 사차방정식 $x^4-6x^3+11x^2-6x+1=0$의 한 근을 α라 할 때, $\alpha+\frac{1}{\alpha}$의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

먼저 주어진 방정식을 x^2 으로 나누면

방정식은 $x^2-6x+11-\frac{6}{x}+\frac{1}{x^2}=0$

$\rightarrow \left(x+\frac{1}{x}\right)^2-6\left(x+\frac{1}{x}\right)+9=0$이 된다.

이 식에 α를 넣어도 성립하므로

$\alpha+\frac{1}{\alpha}$를 t로 치환하면

$\alpha+\frac{1}{\alpha}$는 3이 된다.

따라서$\alpha+\frac{1}{\alpha}=3$

14. 두 부등식 $ax^2 + (a^2 - 1)x + b > 0$, $|x| < |a|$의 해가 같을 때, $a + b$ 의 값은? (단, $a \neq 0$)

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$|x| < |a|$ 에서 양변을 제곱하면

$x^2 < a^2$ 이므로

$x^2 - a^2 < 0 \cdots\cdots$ ㉠

㉠의 양변에 $a(a < 0)$ 를 곱하면

$ax^2 - a^3 > 0$ 이고

이것이 $ax^2 + (a^2 - 1)x + b > 0$ 과

일치해야 하므로

$a^2 - 1 = 0, b = -a^3$

$\therefore a = -1,\ b = 1$

$\therefore\ a + b = 0$

15. $\triangle ABC$의 변 BC의 중점을 M이라 할 때, $\overline{AB} = 8$, $\overline{AC} = 6$, $\overline{BC} = 10$ 이면 $\overline{AM}$ 의 길이는?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$ 이므로
$\triangle ABC$ 는 직각삼각형이다.
그리고 빗변인 $\overline{BC}$ 의 중점인 M은 직각삼각형의 외심이다.
$\therefore \overline{AM} = \overline{BM} = \overline{CM} = 5$