1. $x^2 - 5x + 6 = 0$의 근을 근의 공식을 이용하여 구하여라.

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: $x = 2$

▷ 정답: $x = 3$

해설

$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \times 1 \times 6}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}$

$\therefore x = 2$ 또는 $x = 3$

2. 이차방정식 $x^2-x(kx-5)+3=0$이 허근을 가질 때, 정수 k의 최댓값을 구하면?

① -3　② -2　③ -1　④ 0　⑤ 1

해설

$x^2-kx^2+5x+3=0$이 허근은 가지려면
$D=25-4\times3(1-k)<0$
$25-12+12k<0 \quad \therefore 12k<-13$
$\therefore k<-\dfrac{13}{12}$이므로
정수 k의 최댓값은 -2

3. 방정식 $|x-1|=2$ 의 해를 모두 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

▷ 정답 : −1

해설

ⅰ) $x \geq 1$ 일 때

$|x-1| = x-1$ 이므로, $x-1=2$

$\therefore x=3$

ⅱ) $x<1$ 일 때

$|x-1| = -x+1$ 이므로, $-x+1=2$

$\therefore x=-1$

따라서 (ⅰ), (ⅱ) 에서 $x=3$ 또는 $x=-1$

4. $2|x-1|+x-4=0$의 해를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

▷ 정답 : -2

해설

i) $x<1$일 때,
$-2(x-1)+(x-4)=0$
$\therefore x=-2$
ii) $x\geq 1$일 때,
$2(x-1)+x-4=0$
$\therefore x=2$
따라서 구하는 해는 $x=-2$ 또는 $x=2$ 이다.

5. x에 대한 이차방정식 $(m+3)x^2-4mx+2m-1=0$이 중근을 갖도록 하는 실수 m의 값의 합은?

① $-\frac{5}{2}$ ② $-\frac{3}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

해설

주어진 이차방정식의 판별식을 D라고 하면 중근을 가질 조건은 $D=0$이므로

$\frac{D}{4}=(-2m)^2-(m+3)(2m-1)=0$

$4m^2-(2m^2+5m-3)=0$

$2m^2-5m+3=0$

$(m-1)(2m-3)=0$

$\therefore m=1$ 또는 $\frac{3}{2}$

$\therefore 1+\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$

6. 이차방정식 $3x^2-6x+k=0$이 허근을 갖도록 실수 k의 범위를 정하면?

① $k \le 3$　② $k > 3$　③ $k \le 2$　④ $k > 2$　⑤ $k < 1$

해설

이차방정식이 허근을 가질 조건 : $D<0$

$3x^2-6x+k=0$

$\frac{D}{4}=9-3k<0$

$\therefore\ k>3$

7. 계수가 실수인 x에 대한 이차방정식 $x^2+2(k-a)x+k^2+b-3=0$ 이 k의 값에 관계없이 항상 중근을 갖도록 하는 상수 a, b의 값은?

① $a=1, b=2$ ② $a=0, b=3$ ③ $a=-1, b=2$
④ $a=0, b=2$ ⑤ $a=-1, b=3$

해설

중근을 가지려면, 편별식이 0이다.
$D'=(k-a)^2-(k^2+b-3)=0$
$\Rightarrow\ -2ak+a^2-b+3=0$
모든 k 에 대해 성립하려면
$-2a=0,\ a^2-b+3=0$
$\therefore\ a=0, b=3$

8. 이차방정식 $x^2 + 2(k-a)x + k^2 + a^2 + b - 2 = 0$이 실수 k의 값에 관계없이 중근을 가질 때, $a+b$의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$\frac{D}{4} = (k-a)^2 - (k^2 + a^2 + b - 2) = 0$$

$\therefore\ -2ka - b + 2 = 0$

이 식은 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

k에 대한 항등식이다.

$a = 0,\ b = 2$

$\therefore\ a + b = 2$

9. x에 대한 이차식 $2x^2+(k+1)x+k-1$이 완전제곱식이 될 때, k의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$2x^2+(k+1)x+k-1$이 완전제곱식이므로

$D=(k+1)^2-8(k-1)=0$

$(k-3)^2=0$

$\therefore\ k=3$

10. 이차식 $ax^2+4x+2a$가 x에 대한 완전제곱식이 되도록 하는 실수 a의 값은?

① ± 1　② $\pm\sqrt{2}$　③ ± 2　④ $\pm\sqrt{3}$　⑤ $\pm\sqrt{5}$

해설

주어진 식이 x에 대한 완전제곱식이 되려면
판별식 $D=0$이어야 한다.

$\frac{D}{4}=2^2-a\cdot 2a=0$

$4-2a^2=0,\ a^2=2$

$\therefore a=\pm\sqrt{2}$

11. 방정식 $(a^2-3)x-1=a(2x+1)$ 의 해가 존재하지 않기 위한 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$(a^2-2a-3)x=a+1$

$(a-3)(a+1)x=a+1$

$\therefore a=3$ 이면 해가 없다.

12. 방정식 $a^2x+1=a(x+1)$의 해가 존재하지 않을 때, 상수 a의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$a^2x+1=a(x+1)$ 에서 $a(a-1)x=a-1$

ⅰ) $a=1$ 일 때, $0\cdot x=0$ 이므로 해는 무수히 많다.

ⅱ) $a=0$ 이면 $0\cdot x=-1$ 이므로 해가 없다.

ⅲ) $a\neq 0, a\neq 1$ 일 때, $x=\dfrac{a-1}{a(a-1)}=\dfrac{1}{a}$

따라서 해가 없을 때의 a의 값은 0이다.

13. $\sqrt{(x-1)^2}+\sqrt{(3-x)^2}=x+3$은 서로 다른 두 실근을 갖는다. 이 두 실근을 α, β라 할 때, $3\alpha\beta$의 값은?

① 3　　② 5　　③ 7　　④ 9　　⑤ 11

해설

(준식)$=|x-1|+|3-x|=x+3$

i) $x<1$

$-x+1+3-x=x+3,\ 3x=1$

$\therefore\ x=\dfrac{1}{3}$

ii) $1\le x<3$

$x-1+3-x=x+3,$

$x=-1$(해가 아니다)

iii) $x\ge 3$

$x-1-3+x=x+3x=7$

두 근이 $\dfrac{1}{3}$, 7

$\therefore 3\alpha\beta=7$

14. $|x-1| = 3 - \sqrt{x^2}$ 의 해를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

▷ 정답 : −1

해설

$|x-1| = 3 - |x|$ 에서,
$|x| + |x-1| = 3$ 이다.
ⅰ) $x < 0$ 일 때,
$-x - (x-1) = 3$
$\therefore x = -1$
ⅱ) $0 \le x < 1$ 일 때,
$x - (x-1) = 3$
$0 \cdot x + 1 = 3$ 이므로 불능
ⅲ) $x \ge 1$ 일 때,
$x + (x-1) = 3$
$\therefore x = 2$
따라서 구하는 해는
$x = -1$ 또는 $x = 2$ 이다.

15. 방정식 $(x-1)^2+|x-1|-6=0$ 의 두 근의 합은?

① -1 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 6

해설

$|x-1|$이 존재하므로 절댓값의 부호에 따라서
$x-1\geq 0,\ x-1<0$으로 구간을 나누면
ⅰ) $x\geq 0$ 일 때, $|x-1|=x-1$
$(x-1)^2+(x-1)-6=0$
$(x-3)(x+2)=0\ \therefore\ x=-2,\ 3$
하지만 $x\geq 0$이므로 $x=3$
ⅱ) $x<0$ 일 때, $|x-1|=-(x-1)$
$(x-1)^2-(x-1)-6=0$
$(x-4)(x+1)=0\ \therefore\ x=-1,\ 4$
하지만 $x<0$이므로 $x=-1$
$\therefore$ 두 근의 합은 $3+(-1)=2$

16. 이차방정식 $(\sqrt{2}-1)x^2-(3-\sqrt{2})x+\sqrt{2}=0$의 두 근은?

① $\sqrt{2},\ 1+\sqrt{2}$　② $-\sqrt{2},\ 1+\sqrt{2}$　③ $\sqrt{2},\ 1-\sqrt{2}$
④ $-\sqrt{2},\ -1-\sqrt{2}$　⑤ $\sqrt{2},\ -1+\sqrt{2}$

해설

양변에 $\sqrt{2}+1$을 곱하면
$x^2-(2\sqrt{2}+1)x+\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)=0$
$(x-\sqrt{2})\left\{x-(\sqrt{2}+1)\right\}=0$
$\therefore x=\sqrt{2},\ \sqrt{2}+1$

해설

$x^2-(2\sqrt{2}+1)x+\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)=0$로 고친 후 근의 공식을 이용하여 풀어도 좋다.

17. 다음 방정식을 풀면?

$(2-\sqrt{3})x^2+(1-\sqrt{3})x-1=0$

① $x=-1$ 또는 $-\sqrt{3}$

② $x=-1$ 또는 $-2+\sqrt{3}$

③ $x=-1$ 또는 $2+\sqrt{3}$

④ $x=1$ 또는 $2-\sqrt{3}$

⑤ $x=1$ 또는 $=2+\sqrt{3}$

해설

주어진 식의 양변에 $2+\sqrt{3}$ 을 곱하면

$(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})x^2+(2+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})x-(2+\sqrt{3})=0$

$x^2-(1+\sqrt{3})x-(2+\sqrt{3})=0$

$(x+1)\left\{x-(2+\sqrt{3})\right\}=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2+\sqrt{3}$

18. 이차방정식 $(2-\sqrt{3})x^2-2(\sqrt{3}-1)x-6=0$의 두 근 중 큰 근에 가장 가까운 정수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

이차항의 계수를 유리수로 고치기 위해 방정식의 양변에 $2+\sqrt{3}$을 곱하면

$x^2-2(\sqrt{3}+1)x-(12+6\sqrt{3})=0$

근의 공식을 이용해 위 방정식을 풀면

$x=(\sqrt{3}+1)\pm\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2+12+6\sqrt{3}}$

$=(\sqrt{3}+1)\pm 2\sqrt{4+2\sqrt{3}}$

$=(\sqrt{3}+1)\pm 2(\sqrt{3}+1)$

$\therefore\ x=3\sqrt{3}+3$ 또는 $x=-\sqrt{3}-1$

큰 근은 $3\sqrt{3}+3$

그런데 $\sqrt{3}\fallingdotseq 1.7\cdots$ 이므로

가장 가까운 정수는 8이다.

19. 다음 이차방정식을 풀면?

$$(1-i)x^2+(1+i)x-2=0$$

① $x=-1$ 또는 $x=-i$ ② $x=-1$ 또는 $x=-1-i$

③ $x=-1$ 또는 $x=-1+i$ ④ $x=1$ 또는 $x=-1-i$

⑤ $x=1$ 또는 $x=-1+i$

해설

x^2 의 계수를 실수로 만들기 위해 양변에 $1+i$를 곱하면

$(1+i)(1-i)x^2+(1+i)^2x-2(1+i)=0$

$2x^2+2ix-2(1+i)=0$

$(x-1)\left\{x+(1+i)\right\}=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=-1-i$

20. 다음 방정식의 해는?

$$x^2 - 5|x| + 6 = 0$$

① $0,\ \pm 1$　② $0,\ \pm 2$　③ $\pm1,\ \pm 2$

④ $\pm2,\ \pm 3$　⑤ $\pm3,\ \pm 4$

해설

(i) $x^2 - 5|x| + 6 = 0$에서
$x \geq 0$일 때,
$x^2 - 5x + 6 = 0$
$(x-2)(x-3) = 0$
$\therefore x = 2$, 또는 $x = 3$
(ii) $x < 0$일 때,
$x^2 + 5x + 6 = 0$
$(x+2)(x+3) = 0$
$\therefore x = -2$, 또는 $x = -3$
(i), (ii)에서 $x = \pm2,\ x = \pm3$

21. 이차방정식 $x^2-4|x|-5=0$의 두 근의 곱은?

① -5 ② -10 ③ -15 ④ -20 ⑤ -25

해설

ⅰ) $x \geq 0$일 때,
$x^2-4x-5=(x-5)(x+1)=0$
$\therefore x=5$
ⅱ) $x<0$일 때,
$x^2+4x-5=(x+5)(x-1)=0$
$\therefore x=-5$
ⅰ), ⅱ)에서 두 근의 곱은 -25이다.

22. 방정식 $x^2 - [x] - 4 = 0$ $(0 < x < 4)$ 의 모든 근의 합은?

① $2\sqrt{6}$　② $\sqrt{10}$　③ 3　④ $\sqrt{7}$　⑤ $\sqrt{6}$

해설

이차방정식 $x^2 - [x] - 4 = 0$에서

(i) $0 < x < 1$일 때, $[x] = 0$이므로

$x^2 - 4 = 0, (x+2)(x-2) = 0$

$\therefore x = -2$ 또는 $x = 2$

그런데 $0 < x < 1$이므로 해가 없다.

(ii) $1 \le x < 2$일 때, $[x] = 1$이므로

$x^2 - 5 = 0,\ (x + \sqrt{5})(x - \sqrt{5}) = 0$

$\therefore x = -\sqrt{5}$ 또는 $x = \sqrt{5}$

그런데 $1 \le x < 2$이므로 해가 없다.

(iii) $2 \le x < 3$일 때, $[x] = 2$이므로

$x^2 - 6 = 0,\ (x + \sqrt{6})(x - \sqrt{6}) = 0$

$\therefore x = -\sqrt{6}$ 또는 $x = \sqrt{6}$

그런데 $2 \le x < 3$이므로 $x = \sqrt{6}$

(iv) $3 \le x < 4$일 때, $[x] = 3$이므로

$x^2 - 7 = 0,\ (x + \sqrt{7})(x - \sqrt{7}) = 0$

$\therefore x = -\sqrt{7}$ 또는 $x = \sqrt{7}$

그런데 $3 \le x < 4$이므로 해가 없다.

따라서 모든 근의 합은 $\sqrt{6}$

23. x에 대한 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 $-1+\sqrt{2}$일 때, 유리수 a, b의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a=2$

▷ 정답 : $b=-1$

해설

$x^2+ax+b=0$에 $x=-1+\sqrt{2}$를 대입하여 정리하면
$3-2\sqrt{2}+a(-1+\sqrt{2})+b=0$
$-a+b+3+(a-2)\sqrt{2}=0$
$-a+b+3=0$과 $a-2=0$에서 $a=2,\ b=-1$

24. x에 대한 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 $1+i$일 때, 실수 a, b의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a=-2$

▷ 정답 : $b=2$

해설

$x^2+ax+b=0$에 $x=1\pm i$를 대입하여 정리하면
$1+2i-1+a(1+i)+b=0$과
$a+b+(a+2)i=0$이다.
위 식을 정리하면 $a+b=0$과 $a+2=0$에서
$a=-2, b=2$이다.

해설

계수가 실수이므로 한 근이 복소수 근이면 켤레복소수 근을 갖는다.
따라서 두 근은 $1+i,\ 1-i$
근과 계수의 관계에서
$-a=(1+i)+(1-i)=2 \qquad \therefore a=-2$
$b=(1+i)(1-i)=2 \qquad \therefore b=2$

25. 이차방정식 $x^2-x+m=0$의 한 근이 2일 때, 다른 한 근을 구하여라. (단, m은 상수)

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$x^2-x+m=0$의 한 근이 2이므로
$x=2$를 대입하면
$2^2-2+m=0 \quad \therefore m=-2$
따라서 주어진 방정식은 $x^2-x-2=0$이다.
이 방정식을 풀면
$(x-2)(x+1)=0$에서 $x=2$ 또는 $x=-1$
이므로 다른 한 근은 -1이다.

26. 이차방정식 $x^2 + mx + m - 1 = 0$의 한 근이 1일 때, 다른 한 근을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -1

해설

1이 $x^2 + mx + m - 1 = 0$의 근이므로
$x = 1$을 대입하면 $1 + m + m - 1 = 0 \quad \therefore m = 0$
주어진 방정식은 $x^2 - 1 = 0 \quad \therefore x = \pm 1$
따라서 다른 한 근은 $x = -1$

27. 다음 설명 중 틀린 것을 고르면?

① $x^2+5x+1=0$은 서로 다른 두 실근 을 가진다.

② $x^2+5=0$는 두 허근을 가진다.

③ $m=0$ 또는 4일 때, $x^2-mx+m=0$은 중근을 가진다.

④ $k \geqq 1$일 때 $x^2-2x+2-k=0$은 서로 다른 두 실근을 가진다

⑤ $x^2-6x+a=0$ 은 $a=9$일 때만 중근을 가진다.

해설

① $25-4\cdot1\cdot1=21>0$
② $0^2-4\cdot1\cdot1=-4<0$
③ $(-m)^2-4\cdot1\cdot m=m(m-4)=0$
⑤ $9-1\cdot a=9-a=0,\ a=9$
$\Rightarrow$ ④ $(-1)^2-1\cdot(2-k)=k-1>0\ \therefore\ k>1$

28. x 에 대한 방정식 $ax^2+2x-a-2=0$ 의 근을 판별하면? (단, a 는 실수)

① 오직 한 실근을 갖는다.
② 항상 서로 다른 두 실근을 갖는다.
③ 중근을 갖는다.
④ 실근을 갖는다.
⑤ 허근을 갖는다.

해설

(ⅰ) $a=0$ 일 때 : $x=\dfrac{a+2}{2}$
(ⅱ) $a\neq 0$ 일 때 : 판별식을 구한다.
$D'=1+a(a+2)=a^2+2a+1=(a+1)^2\geq 0$
∴ 주어진 방정식은 실근을 갖는다

29. x에 관한 이차방정식 $(m^2-1)x^2-2(m-1)x+3=0$이 중근을 갖도록 하는 m의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$(m^2-1)x^2-2(m-1)x+3=0$
(ⅰ) 이차방정식이므로 $m^2-1\neq 0$
$\therefore\ m\neq 1,-1$
(ⅱ) 중근을 가지려면 판별식 $D=0$
$\dfrac{D}{4}=(m-1)^2-3(m^2-1)=0$
$m^2-2m+1-3m^2+3=0$
$m^2+m-2=0$
$(m+2)(m-1)=0$
$\therefore\ m=1,-2$
$\therefore$(ⅰ)과 (ⅱ)에서 $m=-2$일 때만 중근을 갖는다.

30. x 에 대한 두 이차방정식
$x^2-2\sqrt{b}x+(2a+1)=0 \cdots$ ㉠
$x^2-2ax-b=0 \cdots$ ㉡가 있다. ㉠이 서로 다른 두 실근을 가질 때, ㉡의 근을 판별하면? (단, a, b 는 실수이고, $b \geq 0$)

① 서로 다른 두 실근을 가진다.

② 중근을 가진다.

③ 서로 다른 두 허근을 가진다.

④ 판별할 수 없다.

⑤ 한 개의 실근과 한 개의 허근을 가진다.

해설

㉠의 판별식을 D 라 하면

$\frac{D}{4}=b-(2a+1)>0 \therefore\ b>2a+1$

㉡의 판별식을 D' 이라 하면

$\frac{D'}{4}=a^2+b>a^2+2a+1$

$=(a+1)^2 \geq 0$

$\therefore\ \frac{D'}{4}>0$

따라서, ㉡은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

31. x에 대한 이차방정식 $ax^2+2(a-1)x-(a+1)=0$은 어떤 근을 갖는지 판별하시오. (단, a는 실수)

① 중근　　② 한 실근과 한 허근

③ 서로 다른 두 실근　　④ 서로 같은 두 실근

⑤ 서로 다른 두 허근

해설

$ax^2+2(a-1)x-(a+1)=0$

$\frac{D}{4}=(a-1)^2+a(a+1)$

$=a^2-2a+1+a^2+a$

$=2a^2-a+1=2\left(a^2-\frac{1}{2}a\right)+1$

$=2\left(a^2-\frac{1}{2}a+\frac{1}{16}\right)+1-\frac{1}{8}$

$=2\left(a-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{8}>0$

따라서 서로 다른 두 실근을 갖는다.

32. 0이 아닌 두 실수 a, b가 $\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$를 만족할 때, 다음 [보기]의 x에 대한 이차방정식 중 서로 다른 두 실근을 갖는 것을 모두 고른 것은?

보기

ㄱ $ax^2 - bx + 1 = 0$

ㄴ $x^2 - ax - b = 0$

ㄷ $x^2 + 2(a+b)x + (a^2 + b^2) = 0$

① ㄱ　　② ㄴ　　③ ㄱ, ㄷ　　④ ㄴ, ㄷ　　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해설

$\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$이므로 $a < 0$, $b < 0$
ㄱ $ax^2 - bx + 1 = 0$에서
$D = b^2 - 4a > 0$
ㄴ $x^2 - ax - b = 0$에서
$D = a^2 + 4b$는 음수, 양수를 판별할 수 없다.
ㄷ $x^2 + 2(a+b)x + (a^2 + b^2) = 0$에서
$\frac{D}{4} = (a+b)^2 - (a^2 + b^2) = 2ab > 0$

33. a가 실수일 때, $f(x)=x^2+2(a+1)x+a^2$, $g(x)=x^2+2ax+(a-1)^2$에 대하여 x에 대한 두 이차방정식 $f(x)=0, g(x)=0$의 근에 대한 다음 설명 중 옳은 것은?

① $f(x)=0$이 실근을 가지면 $g(x)=0$도 실근을 가진다.

② $f(x)=0$이 실근을 가지면 $g(x)=0$은 허근을 가진다.

③ $f(x)=0$이 허근을 가지면 $g(x)=0$도 허근을 가진다.

④ $g(x)=0$이 실근을 가지면 $f(x)=0$은 허근을 가진다.

⑤ $g(x)=0$이 허근을 가지면 $f(x)=0$은 실근을 가진다.

해설

방정식 $f(x)=0$과 $g(x)=0$의 판별식을 각각 D_1, D_2라 하면

$\frac{D_1}{4}=(a+1)^2-a^2=2a+1$,

$\frac{D_2}{4}=a^2-(a-1)^2=2a-1$

모든 실수 a에 대하여

$2a+1>2a-1$,

즉, $D_1>D_2$이므로 $D_1<0$이면 $D_2<0$

34. x에 관한 이차방정식$x^2+2(m+a+2)x+m^2+a^2-2b=0$이 m의 값에 관계없이 항상 중근을 갖도록 상수의 a, b의 값을 정할 때. $a+b$의 값은?

① 0　　② 4　　③ 2　　④ -1　　⑤ -3

해설

중근 : $\frac{D}{4}=0$

m값에 관계없이 성립 : m에 대한 항등식

$\frac{D}{4}=(a+m+2)^2-(m^2+a^2-2b)=0$

$m\cdot(2a+4)+(4+4a+2b)=0$

$2a+4=0,\quad a=-2$

$4+4a+2b=0,\quad b=2$

$\therefore\ a+b=0$

35. 두 양의 실수 x, y 가 $2x^2 + xy - 2y^2 = 0$을 만족할 때, $\frac{x}{y}$ 를 구하면?

① $\frac{-1+\sqrt{17}}{4}$ ② $\frac{-1-\sqrt{17}}{2}$ ③ $\frac{-1-\sqrt{17}}{4}$
④ $\frac{1+\sqrt{17}}{4}$ ⑤ $\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$

해설

$x > 0$, $y > 0$ 에서 $2x^2 + xy - 2y^2 = 0$의 양변을 y^2으로 나누면

$2\left(\frac{x}{y}\right)^2 + \left(\frac{x}{y}\right) - 2 = 0$

$\frac{x}{y} = t$라 하면 $(t > 0)$

$2t^2 + t - 2 = 0$

근의 공식에 대입하면

$t = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{4}$

$\therefore t = \frac{-1+\sqrt{17}}{4}$ $(t > 0)$ $\frac{x}{y} = \frac{-1+\sqrt{17}}{4}$

36. 구간 $0 < x < 5$에서 $x = \dfrac{1}{x-[x]}$를 만족시키는 x의 개수는? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수)

① 2개　　② 3개　　③ 4개
④ 5개　　⑤ 무수히 많다.

해설

$x-[x] \neq 0$이므로 x는 정수가 아니다.
주어진 식의 양변에 $x-[x]$를 곱하면
$x^2 - x[x] - 1 = 0$
(i) $0 < x < 1$일 때 $[x] = 0$, $x^2 - 1 = 0$
$\therefore\ x = \pm 1$, 이 값은 $0 < x < 1$에 속하지 않는다.
$\therefore$ 해가 없다.
(ii) $1 < x < 2$일 때 $[x] = 1$, $x^2 - x - 1 = 0$
$\therefore\ x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$
$1 < x < 2$이므로 $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$
(iii) $2 < x < 3$일 때 $[x] = 2$
$\therefore\ x^2 - 2x - 1 = 0$
$\therefore\ x = 1 \pm \sqrt{1+1} = 1 \pm \sqrt{2}$
$2 < x < 3$이므로 $x = 1 + \sqrt{2}$
(iv) $3 < x < 4$일 때 $[x] = 3$
$\therefore\ x^2 - 3x - 1 = 0$
$\therefore\ x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9+4}}{2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$
$3 < x < 4$이므로 $x = \dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$
(v) $4 < x < 5$일 때 $[x] = 4$
$\therefore\ x^2 - 4x - 1 = 0$
$x = 2 \pm \sqrt{4+1} = 2 \pm \sqrt{5}$
$4 < x < 5$이므로 $x = 2 + \sqrt{5}$
(i), (ii), (iii), (iv), (v)에서 x의 개수는 4개

37. m은 양의 정수이고, x에 관한 이차방정식 $x^2-(3+\sqrt{2})x+m\sqrt{2}-4=0$의 한 근은 정수이다. 이 때, m의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

정수근을 α라 하자

$\alpha^2-(3+\sqrt{2})\alpha+m\sqrt{2}-4=0$

$(m-\alpha)\sqrt{2}+\alpha^2-3\alpha-4=0$

$m=\alpha$ 그리고 $\alpha^2-3\alpha-4=0$

$(\alpha+1)(\alpha-4)=0$

$\alpha=-1$ 또는 $\alpha=4$

m이 양의 정수이므로 $\alpha=4$에서 $m=4$

38. $a^2-3a+1=0$일 때, $a^2-2a+\dfrac{3}{a^2+1}$의 값은?

① 2　② 3　③ 4　④ 5　⑤ 6

해설

$a^2-3a+1=0$에서

$a^2-2a+\dfrac{3}{a^2+1}=a-1+\dfrac{3}{3a}=a+\dfrac{1}{a}-1$

한편, $a^2-3a+1=0$의 양변을 a로 나누면

$a-3+\dfrac{1}{a}=0 \quad \therefore\ a+\dfrac{1}{a}=3$

$\therefore$(준식)$=\left(a+\dfrac{1}{a}\right)-1=2$

39. 이차방정식 $2x^2+x-5=0$을 만족하는 양수 x에 대하여 $(4x-\sqrt{41})^2+(2x-1)(x+1)$의 값은?

① 4 ② 2 ③ −1 ④ 5 ⑤ −5

해설

근의 공식을 이용하여 x를 구하면

$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{41}}{4}$

$x>0$이므로 $x=\dfrac{-1+\sqrt{41}}{4}$

$4x-\sqrt{41}=-1$, $2x^2+x=5$

(준식)$=(-1)^2+(2x^2+x-1)=1+(5-1)=5$

40. 방정식 $\left\{1+(a+b)^2\right\}x^2-2(1-a-b)x+2=0$의 근이 실수일 때 a^3+b^3-3ab의 값을 구하면 ? (단, a, b는 실수)

① 1　　② -1　　③ 2　　④ -2　　⑤ 0

해설

$\frac{D}{4}=(1-a-b)^2-\left\{1+(a+b)^2\right\}\cdot 2\geq 0$

$-(a+b)^2-2(a+b)-1\geq 0$

양변에 -1을 곱하면

$(a+b)^2+2(a+b)+1\leq 0$

$\{(a+b)+1\}^2\leq 0$

그런데 a, b가 실수이므로 $a+b+1=0$

$\therefore\ a+b=-1$

$$\begin{aligned}\therefore\ a^3+b^3-3ab &= (a+b)^3-3ab(a+b)-3ab\\ &= (-1)^3-3ab(-1)-3ab\\ &= -1\end{aligned}$$

41. 이차식 $x^2 - xy - 2y^2 - ax - 3y - 1$ 이 $x,\ y$ 에 관한 두 일차식의 곱으로 인수분해 되는 모든 상수 a 의 값의 합은?

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

해설

(주어진 식)$= 0$이라 놓고 x에 관하여 정리하면

$x^2 - (a + y)x - (2y^2 + 3y + 1) = 0$

근의 공식에서

$$x = \frac{a + y \pm \sqrt{(a + y)^2 + 4(2y^2 + 3y + 1)}}{2}$$

$$= \frac{a + y \pm \sqrt{9y^2 + 2(a + 6)y + a^2 + 4}}{2}$$

주어진 식이 $x,\ y$에 관한 일차식으로 인수분해되려면 근호 안의 식$(= D)$ 이 완전제곱 꼴이어야 한다.

$D = 9y^2 + 2(a + 6)y + a^2 + 4$ 의 판별식이 0 이 되어야 하므로

$$\frac{D'}{4} = (a + 6)^2 - 9(a^2 + 4) = -8a^2 + 12a = 0$$

$\therefore\ a = 0$ 또는 $a = \frac{3}{2}$

$\therefore\ 0 + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$

42. x보다 작거나 같은 정수 중에서 최대의 정수를 $[x]$, x보다 크거나 같은 정수 중에서 최소의 정수를 $< x >$로 나타낼 때, 방정식 $[x] + < x >= 7$의 해를 구하면?

① $\frac{7}{2}$ ② $3 \leq x \leq 4$ ③ $3 \leq x < 4$
④ $3 < x \leq 4$ ⑤ $3 < x < 4$

해설

x가 정수 k일 때,
$[x] =< x >= k$
$k < x < k+1$일 때,
$[x] = k, < x >= k+1$
따라서 $[x] + < x >= 7$이고
$[x], < x >$는 정수이므로
$[x] = 3, \ < x >= 4 \ (\because \ [x] \leq < x >)$
$\therefore \ 3 < x < 4$

43. 이차방정식 $ax^2+2bx+c=0$, $bx^2+2cx+a=0$이 모두 서로 다른 두 허근을 가질 때, $(a+b)x^2+2(b+c)x+(c+a)=0$의 근을 판별하면? (단, $ab \neq 0$, $a+b \neq 0$, a, b, c는 실수)

① 중근을 갖는다.

② 두 실근을 갖는다.

③ 서로 다른 두 실근을 갖는다.

④ 서로 다른 두 허근을 갖는다.

⑤ 근을 판별할 수 없다.

해설

$ax^2+2bx+c=0$, $bx^2+2cx+a=0$이
서로 다른 두 허근을 가지면
$b^2-ac<0, b^2<ac \cdots$ ㉠
$c^2-ab<0, c^2<ab \cdots$ ㉡
$(a+b)x^2+2(b+c)x+(c+a)=0$에서
$\frac{D}{4}=(b+c)^2-(a+b)(c+a)$
$=(b^2-ac)+(c^2-ab)-(a^2-bc)$
여기에서 a^2-bc의 부호를 판단하면 되는데
$(b^2-ac)+(c^2-ab)+(a^2-bc)$
$=\frac{1}{2}\left\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right\} \geq 0$
㉠, ㉡가 성립하므로 $a^2-bc>0$
$\therefore \frac{D}{4}<0$, 서로 다른 두 허근을 갖는다.

해설

문제에서 주어진 두 방정식이 각각 허근을 가지면
$b^2-ac<0, b^2<ac \cdots$ ㉠
$c^2-ab<0, c^2<ab \cdots$ ㉡
㉠, ㉡를 변변끼리 곱하면
$(bc)^2<a^2bc \cdots$ ㉢
$ac>0, ab>0 \Rightarrow bc>0$
㉢의 양변을 bc로 나누면
$bc<a^2 \quad \therefore a^2-bc>0$
$(a+b)x^2+2(b+c)x+(c+a)=0$에서
$\frac{D}{4}=(b+c)^2-(a+b)(c+a)$
$=(b^2-ac)+(c^2-ab)-(a^2-bc)<0$
$(\because b^2-ac<0, c^2-ab<0, a^2-bc>0)$
$\therefore$ 서로 다른 두 허근을 갖는다.

44. $x^2 + xy - 2y^2 + 2x + 7y + k = f(x, y)$라 할 때, $f(x, y) = 0$이 두 개의 직선을 나타내도록 k의 값을 정하면?

① -5 ② -4 ③ -3 ④ -2 ⑤ -1

해설

$f(x,\ y) = x^2 + (y+2)x - 2y^2 + 7y + k = 0$
주어진 식이 두 개의 직선을 나타내려면
$x,\ y$에 관한 일차식으로 인수분해되어야 하므로
근의 공식에서 근호 안의 식$(= D)$이 완전제곱꼴이어야 한다.
$D = (y+2)^2 - 4(-2y^2 + 7y + k)$
$\quad = 9y^2 - 24y + 4 - 4k \quad \cdots$(i)
(i)이 완전제곱식이어야 하므로
(i)의 판별식
$\frac{D}{4} = (-12)^2 - 9(4 - 4k) = 0$
$108 + 36k = 0 \quad \therefore\ k = -3$