

1. 이차방정식 $x^2 - x + 4 = 0$ 의 근을 구하면?

① $x = 1 \pm \sqrt{3}$ ② $x = 1 \pm \sqrt{15}$ ③ $x = -1 \pm \sqrt{15}i$

④ $x = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ ⑤ $x = \frac{1 \pm \sqrt{15}i}{2}$

해설

근의 공식을 이용한다.

$$x^2 - x + 4 = 0, \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{15}i}{2}$$

2. 이차방정식 $x^2 + 4x + k = 0$ 이 허근을 가지도록 상수 k 의 값의 범위를 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $k > 4$

해설

$$\frac{D}{4} = 2^2 - k < 0$$

$$\therefore k > 4$$

3. x 에 대한 일차방정식 $(a^2 + 3)x + 1 = a(4x + 1)$ 의 해가 무수히 많을 때, a 의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$(a^2 + 3 - 4a)x = a - 1$
모든 x 에 대해 성립하려면
 $a^2 - 4a + 3 = 0, a - 1 = 0$
공통근 : $a = 1$

4. 방정식 $|x| + |x - 1| = 2$ 의 해를 구하시오.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $-\frac{1}{2}$ 또는 -0.5

▷ 정답 : $\frac{3}{2}$ 또는 1.5

해설

i) $x < 0$ 일 때,
 $-x - (x - 1) = 2$ 이므로 $-2x + 1 = 2$
 $\therefore x = -\frac{1}{2}$
ii) $0 \leq x < 1$ 일 때,
 $x - (x - 1) = 2$ 이므로 $0 \cdot x = 1$
 $\therefore$ 해가 없다.
iii) $1 \leq x$ 일 때,
 $x + x - 1 = 2$ 이므로 $2x = 3$
 $\therefore x = \frac{3}{2}$
(i), (ii), (iii) 에서 $x = -\frac{1}{2}$ 또는 $x = \frac{3}{2}$

5. 이차방정식 $x^2 + (k - 4)x + k - 1 = 0$ 이 중근을 가지도록 상수 k 의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

판별식을 D 라 하면,
 $D = 0$ 일 때 중근을 가지므로
 $D = (k - 4)^2 - 4(k - 1) = k^2 - 12k + 20 = 0$ 에서
 $(k - 2)(k - 10) = 0$
따라서, $k = 2, k = 10$ 이므로 k 의 값은 12이다.

6. x 에 대한 이차방정식 $(m-1)x^2 - 2mx + (m+2) = 0$ 이 중근을 갖도록 하는 실수 m 의 값과 그 때의 중근을 α 라 할 때, $m + \alpha$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

주어진 방정식이 이차방정식이므로 $m \neq 1$ 이고, x 의 계수가 $2m$ 이므로

$$\frac{D}{4} = m^2 - (m-1)(m+2) = 0$$

정리하면, $-m+2=0 \quad \therefore m=2$

$m=2$ 를 준식에 대입하면

$$x^2 - 4x + 4 = 0, (x-2)^2 = 0$$

$\therefore x=2$ (중근 α)

$$\therefore m + \alpha = 2 + 2 = 4$$

7. 이차방정식 $x^2 + (a+2)x + 1 = 0$ 이 중근을 갖도록 하는 모든 실수 a 의 값의 합을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

주어진 이차방정식이 중근을 가지려면

$D = (a+2)^2 - 4 = 0$ 이므로

$a^2 + 4a + 4 - 4 = a^2 + 4a = 0$

따라서 $a = 0$ 또는 $a = -4$

따라서 상수 a 의 값의 합은 -4

8. x 에 대한 이차방정식 $(k^2 - 1)x^2 - 2(k - 1)x + 1 = 0$ 이 허근을 가질 때, $k > m$ 이다. m 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$(k^2 - 1)x^2 - 2(k - 1)x + 1 = 0$ 이

허근을 가지려면

$$\frac{D}{4} = (k - 1)^2 - (k^2 - 1) < 0$$

$$(k^2 - 2k + 1) - (k^2 - 1) < 0$$

$$-2k + 2 < 0, k > 1$$

$$\therefore m = 1$$

9. 계수가 실수인 x 에 대한 이차방정식 $x^2 + 2(a-m-1)x + a^2 - b + m^2 = 0$ 의 근이 m 의 값에 관계없이 항상 중근을 갖도록 하는 a, b 값의 합은?

- ① -2
- ② -1
- ③ 0
- ④ 1
- ⑤ 2

해설

$$\frac{D}{4} = (a - m - 1)^2 - (a^2 - b + m^2) = 0$$

m 의 값에 관계없이

$$2(-a + 1)m + (-2a + b + 1) = 0$$

이어야 하므로

$$2(-a + 1) = 0, -2a + b + 1 = 0$$

$$\therefore a = 1, b = 1$$

$$\therefore a + b = 2$$

10. 이차식 $x^2 - 2(k-1)x + 2k^2 - 6k + 4$ 가 x 에 대하여 완전제곱식이 될 때, 상수 k 의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

이차식이 완전제곱식이 되면

이차방정식 $x^2 - 2(k-1)x + 2k^2 - 6k + 4 = 0$

이 중근을 갖는다.

따라서, $\frac{D}{4} = (k-1)^2 - (2k^2 - 6k + 4) = 0$

위의 식을 정리하면

$-k^2 + 4k - 3 = 0$

$k^2 - 4k + 3 = 0$

$(k-1)(k-3) = 0$ 에서

$k = 1$ 또는 $k = 3$

11. 방정식 $a(ax - 1) = 2(ax - 1)$ 에 대한 설명으로 옳은 것은?

- ① $a = 0$ 일 때, 부정 ② $a = 2$ 일 때, 불능
③ $a \neq 2$ 일 때, $x = \frac{1}{a}$ ④ $a \neq 0$ 일 때, 해는 없다.
⑤ $a \neq 0, a \neq 2$ 일 때, $x = \frac{1}{a}$

해설

$$a(ax - 1) = 2(ax - 1), a^2x - 2ax = a - 2 \text{에서}$$

$$a(a - 2)x = a - 2$$

i) $a \neq 0, a \neq 2$ 일 때, $x = \frac{1}{a}$

ii) $a = 2$ 일 때, $0 \cdot x = 0$ 이므로 해는 무수히 많다. (부정)

iii) $a = 0$ 일 때, $0 \cdot x = -2$ 이므로 해가 없다. (불능)

따라서 옳은 것은 ⑤뿐이다.

12. 방정식 $a^2 - (1 + x)a + 2x - 2 = 0$ 의 해가 무수히 많을 때, 방정식 $x = (x + 3)a - 10$ 의 해는?

① -3 ② -1 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

해설

$$a^2 - a - ax + 2x - 2 = 0, (a - 2)x = a^2 - a - 2$$

$$(a - 2)x = (a - 2)(a + 1)$$

$$\text{i) } a \neq 2 \text{ 일 때, } x = a + 1$$

$$\text{ii) } a = 2 \text{ 일 때, } 0 \cdot x = 0 \text{ 이므로 해는 무수히 많다.}$$

$$\text{i), ii) 에서 } a = 2 \text{ 일 때이다.}$$

$$\text{따라서 방정식 } x = (x + 3)a - 10 \text{ 에 } a = 2 \text{ 를 대입하면}$$

$$x = (x + 3) \cdot 2 - 10, x = 2x - 4 \therefore x = 4$$

13. 방정식 $|x| + |x - 1| = 9$ 의 모든 근의 곱을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -20

해설

$|x| + |x - 1| = 9$ 에서
i) $x < 0$ 일 때,
 $-x - x + 1 = 9$
 $\therefore x = -4$
ii) $0 \leq x < 1$ 일 때,
 $x - x + 1 = 9$ (성립하지 않음)
iii) $x \geq 1$ 일 때,
 $x + x - 1 = 9$
 $\therefore x = 5$
따라서 모든 근의 곱은
 $(-4) \times 5 = -20$

14. $|x+1|+|x-2|=x+3$ 을 만족하는 해의 합을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

i) $x < -1$ 일 때,
 $-x-1-x+2=x+3$
 $\therefore x = -\frac{2}{3}$ (모순)
ii) $-1 \leq x < 2$ 일 때,
 $x+1-x+2=x+3$
 $\therefore x = 0$
iii) $x \geq 2$ 일 때,
 $x+1+x-2=x+3$
 $\therefore x = 4$

15. 방정식 $|x-3|+|x-4|=2$ 의 해의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

i) $x < 3$ 일 때,
 $-(x-3)-(x-4)=3, -2x=-5$
 $\therefore x=\frac{5}{2}$
ii) $3 \leq x < 4$ 일 때
 $(x-3)-(x-4)=2, 0 \cdot x=1$
 $\therefore$ 해가 없다.
iii) $x \geq 4$ 일 때
 $x-3+x-4=2, 2x=9$
 $\therefore x=\frac{9}{2}$
따라서 $x=\frac{5}{2}, \frac{9}{2}$ 이고 그 합은 7

16. 다음 내용은 이차방정식에 대한 설명이다. 괄호 안에 알맞은 것은?

(가)를 계수로 갖는 이차방정식은 (나)의 범위에서 항상 근을 갖는다. 따라서 (다)를 계수로 갖는 이차식 $ax^2 + bx + c$ 는 (라)의 범위에서는 반드시 (마)의 곱으로 인수분해된다.

- ① (가) 복소수 (나) 복소수 (다) 실수 (라) 실수 (마) 이차식
- ② (가) 복소수 (나) 실수 (다) 복소수 (라) 실수 (마) 일차식
- ③ (가) 복소수 (나) 실수 (다) 실수 (라) 복소수 (마) 이차식
- ④ (가) 실수 (나) 복소수 (다) 실수 (라) 복소수 (마) 이차식
- ⑤ (가) 실수 (나) 복소수 (다) 실수 (라) 복소수 (마) 일차식

해설

(가) 실수, (나) 복소수, (다) 실수, (라) 복소수, (마) 일차식

17. 다음 방정식을 풀면?

$(\sqrt{3}-1)x^2-(\sqrt{3}+1)x+2=0$

- ① $x=-1$ 또는 $x=-\sqrt{3}$

② $x=-1$ 또는 $x=-\sqrt{3}-1$

③ $x=-1$ 또는 $x=\sqrt{3}+1$

④ $x=1$ 또는 $x=-\sqrt{3}+1$

⑤ $x=1$ 또는 $x=\sqrt{3}+1$

해설

x^2 의 계수를 유리수로 만들기 위해 양변에 $\sqrt{3}+1$ 을 곱하면
 $(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)x^2-(\sqrt{3}+1)^2x+2(\sqrt{3}+1)=0$
 $2x^2-2(2+\sqrt{3})x+2(\sqrt{3}+1)=0$
 $x^2-(2+\sqrt{3})x+(\sqrt{3}+1)=0$
 $(x-1)\{x-(\sqrt{3}+1)\}=0$
 $\therefore x=1$ 또는 $x=\sqrt{3}+1$

18. x 에 대한 방정식 $ix^2 + (1+i)x + 1 = 0$ 의 해를 구하여라. (단, $x \neq i$)

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

양변에 $-i$ 를 곱하면

$$(-i) \cdot ix^2 - i(1+i)x - i = 0$$

$$x^2 + (1-i)x - i = 0$$

$$(x-i)(x+1) = 0$$

$$x \neq i \text{이므로 } x = -1$$

19. 이차방정식 $(1-i)x^2 + (-3+i)x + 2 = 0$ 의 해는 $x = a$ 또는 $x = p + qi$ 이다. 이 때, $a + p + q$ 의 값을 구하여라. (단, a, p, q 는 실수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$(1-i)x^2 + (-3+i)x + 2 = 0$ 의 양변에 $1+i$ 를 곱하면

$(1+i)(1-i)x^2 + (1+i)(-3+i)x + 2(1+i) = 0$

$2x^2 - 2(2+i)x + 2(1+i) = 0$

$x^2 - (2+i)x + 1+i = 0$

$(x-1)\{x-(1+i)\} = 0$

$x = 1$ 또는 $x = 1+i$

$\therefore a + p + q = 3$

20. 이차방정식 $(1-i)x^2 + (1+3i)x - 2(1+i) = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $\alpha^2 + \beta^2$ 의 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① -4 ② -3 ③ -2 ④ -1 ⑤ 0

해설

주어진 방정식의 양변에 $1+i$ 를 곱하면

$$(1+i)(1-i)x^2 + (1+i)(1+3i)x - 2(1+i)(1+i) = 0$$

$$2x^2 + (4i-2)x - 2(2i) = 0$$

$$x^2 + (2i-1)x - 2i = 0$$

$$(x+2i)(x-1) = 0$$

$$\therefore x = -2i \text{ 또는 } x = 1$$

$$\therefore \alpha^2 + \beta^2 = (-2i)^2 + 1^2 = -3$$

21. 다음 방정식의 해는?

$x^2 + 3|x| - 4 = 0$

- ① 0
- ② ± 1
- ③ $\pm \sqrt{2}$
- ④ $\pm \sqrt{3}$
- ⑤ ± 2

해설

(i) $x \geq 0$ 일 때 $|x| = x$ 이므로 주어진 방정식은
 $x^2 + 3x - 4 = 0, (x + 4)(x - 1) = 0$
 $\therefore x = -4$ 또는 $x = 1$
이 때, $x \geq 0$ 이므로 $x = -4$ 는 부적합
 $\therefore x = 1$
(ii) $x < 0$ 일 때 $|x| = -x$ 이므로 주어진 방정식은
 $x^2 - 3x - 4 = 0, (x - 4)(x + 1) = 0$
 $x = 4$ 또는 $x = -1$
그런데 $x < 0$ 이므로 $x = -1$
 $\therefore x = 1$ 또는 $x = -1$
이 때, $x < 0$ 이므로 $x = 4$ 는 부적합
(i), (ii) 에서 $x = \pm 1$

22. 방정식 $x^2 - 2|x| - 3 = 0$ 의 근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

i) $x \geq 0$ 일 때
 $x^2 - 2x - 3 = 0, (x + 1)(x - 3) = 0$
 $x = -1$ 또는 $x = 3$
그런데 $x \geq 0$ 이므로 $x = 3$
ii) $x < 0$ 일 때
 $x^2 + 2x - 3 = 0, (x - 1)(x + 3) = 0$
 $x = 1$ 또는 $x = -3$
그런데 $x < 0$ 이므로 $x = -3$
(i), (ii) 에서 $x = 3$ 또는 $x = -3$
따라서 근의 합은 0이다.

23. 방정식 $(x-1)^2 + |x-1| - 6 = 0$ 의 두 근의 합은?

① -1

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 6

해설

(i) $x \geq 1$ 일 때

$$x^2 - 2x + 1 + x - 1 - 6 = 0$$

$$x^2 - x - 6 = 0, (x-3)(x+2) = 0 \text{ 이므로}$$

$$x = -2, x = 3$$

그런데 $x \geq 1$ 이므로 $x = 3$

(ii) $x < 1$ 일 때

$$x^2 - 2x + 1 - x + 1 - 6 = 0$$

$$x^2 - 3x - 4 = 0, (x-4)(x+1) = 0$$

$$x = -1, x = 4$$

그런데 $x < 1$ 이므로 $x = -1$

(i), (ii) 에서 $x = 3, -1$ 이므로

두 근의 합은 2

24. 방정식 $x^2 + |x| = |x - 1| + 5$ 를 만족하는 두 근의 곱은?

㉠ $-2\sqrt{6}$

㉡ $-\sqrt{6}$

㉢ 0

㉣ $\sqrt{6}$

㉤ $2\sqrt{6}$

해설

i) $x < 0$ 일 때
 $x^2 - x = -(x - 1) + 5, x^2 = 6$
 $\therefore x = \pm\sqrt{6}$
그런데 $x < 0$ 이므로 $x = -\sqrt{6}$
ii) $0 \leq x < 1$ 일 때
 $x^2 + x = -(x - 1) + 5$
 $x^2 + 2x - 6 = 0$
 $\therefore x = -1 \pm \sqrt{7}$
그런데 $0 \leq x < 1$ 이므로 해가 없다.
iii) $x \geq 1$ 일 때,
 $x^2 + x = x - 1 + 5, x^2 = 4$
 $\therefore x = \pm 2$
그런데 $x \geq 1$ 이므로 $x = 2$
i), ii), iii)에서 주어진 방정식의 해는
 $x = 2$ 또는 $x = -\sqrt{6}$ 이므로
두 근의 곱은 $-2\sqrt{6}$

25. 이차방정식 $x^2 + 2|x| - 8 = 0$ 의 해는 ?

① $-2, 4$

② $-2, 2$

③ $-4, 4$

④ $-4, 2$

⑤ $-4, -2, 2, 4$

해설

$x^2 + 2|x| - 8 = 0$ 에서

i) $x > 0$ 일 때,

$x^2 + 2x - 8 = 0, (x + 4)(x - 2) = 0$

$\therefore x = -4$ 또는 $x = 2$

그런데 $x > 0$ 이므로 $x = 2$

ii) $x < 0$ 일 때,

$x^2 + 2x - 8 = 0, (x - 4)(x + 2) = 0$

$\therefore x = 4$ 또는 $x = -2$

그런데 $x < 0$ 이므로 $x = -2$

i), ii)에서 구하는 해는 $-2, 2$

26. 이차방정식 $2[x]^2 + 3[x] + 1 = 0$ 의 해를 구하여라. (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

- ① $-1 \leq x < 0$ ② $-1 \leq x < 1$ ③ $-1 \leq x < 2$
④ $0 \leq x < 1$ ⑤ $0 \leq x < 2$

해설

$$2[x]^2 + 3[x] + 1 = ([x] + 1)(2[x] + 1) = 0 \text{ 이므로}$$

$$[x] = -1 \text{ 또는 } [x] = -\frac{1}{2}$$

그런데 $[x]$ 은 정수이므로 $[x] = -1$

$$\therefore -1 \leq x < 0$$

27. 이차방정식 $x^2 - ax + 12 = 0$ 의 두 근이 3, b 일 때, ab 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 28

해설

$x = 3$ 이 $x^2 - ax + 12 = 0$ 의 근이므로

$9 - 3a + 12 = 0 \quad \therefore a = 7$

이 때 $x^2 - 7x + 12 = 0$ 에서 $(x - 3)(x - 4) = 0$

그러므로 $x = 3$ 또는 $x = 4$

$\therefore b = 4 \quad \therefore ab = 28$

28. $x^2 + ax + b = 0$, $x^2 + 2bx + 3a = 0$ 를 동시에 만족하는 x 는 -1 밖에 없을 때, 상수 ab 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$x = -1$ 은 두 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$,

$x^2 + 2bx + 3a = 0$ 의 공통근이므로

$1 - a + b = 0$, $1 - 2b + 3a = 0$

두 식을 연립하여 풀면

$a = -3$, $b = -4$

$\therefore ab = 12$

29. $x^2 - 2x + 3 = 0$ 의 두 근을 α, β 라고 할 때, $(\alpha^2 - 2\alpha)(\beta^2 - 2\beta)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$$\begin{aligned} &x^2 - 2x + 3 = 0 \text{ 에서 근과 계수의 관계에 의해} \\ &\alpha + \beta = 2, \alpha\beta = 3 \\ &(\alpha^2 - 2\alpha)(\beta^2 - 2\beta) \\ &= \alpha^2\beta^2 - 2\alpha^2\beta - 2\alpha\beta^2 + 4\alpha\beta \\ &= (\alpha\beta)^2 - 2\alpha\beta(\alpha + \beta) + 4\alpha\beta \\ &= 9 - 6 \cdot 2 + 12 = 9 \end{aligned}$$

30. 0 이 아닌 두 실수 a, b 에 대하여 $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = -\sqrt{\frac{b}{a}}$ 가 성립할 때, <보기>의 방정식 중 항상 실근이 존재하는 것을 모두 고른 것은?

보 기

- $\textcircled{\tiny ㉠} \quad x^2 + ax + b = 0$
- $\textcircled{\tiny ㉡} \quad x^2 + bx + a = 0$
- $\textcircled{\tiny ㉢} \quad ax^2 + x + b = 0$
- $\textcircled{\tiny ㉣} \quad bx^2 + ax + b = 0$

- ① $\textcircled{\tiny ㉠}, \textcircled{\tiny ㉡}$
- ② $\textcircled{\tiny ㉠}, \textcircled{\tiny ㉢}$
- ③ $\textcircled{\tiny ㉡}, \textcircled{\tiny ㉣}$
- ④ $\textcircled{\tiny ㉡}, \textcircled{\tiny ㉢}$
- ⑤ $\textcircled{\tiny ㉢}, \textcircled{\tiny ㉣}$

해설

$\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = -\sqrt{\frac{b}{a}}$ 이 만족하려면 $b > 0, a < 0$

$\textcircled{\tiny ㉠} \quad x^2 + ax + b = 0, \quad D = a^2 - 4b$

$b \leq \frac{a^2}{4}$ 일 때만 실근 존재

$\textcircled{\tiny ㉡} \quad x^2 + bx + a = 0$

$D = b^2 - 4a > 0$ 항상 실근 존재 (○)

$\textcircled{\tiny ㉢} \quad ax^2 + x + b = 0$

$D = 1 - 4ab > 0$ 항상 실근 존재 (○)

$\textcircled{\tiny ㉣} \quad bx^2 + ax + b = 0$

$D = a^2 - 4b^2, \quad a^2 \geq 4b^2$ 일 때만 실근 존재

31. 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 에 대한 설명으로 다음 <보기> 중 옳은 것의 개수는? (단, a, b, c, p, q 는 실수, $i = \sqrt{-1}$)

보기

- ㉠ 판별식은 $b^2 - 4ac$ 이다.
- ㉡ 두 근의 합은 $\frac{b}{a}$ 이다.
- ㉢ $a < 0, c < 0$ 이면 허근만 갖는다.
- ㉣ $a > 0, c < 0$ 이면 서로 다른 두 실근을 갖는다.
- ㉤ 두 근의 곱은 $\frac{c}{a}$ 이다.
- ㉥ 한 근이 $p + qi$ 이면 다른 한 근은 $q - pi$ 이다.

- ① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

- ㉠ 실계수 방정식에서만 판별식을 사용할 수 있다. 현재 a, b, c 가 실수이므로 판별식 사용 가능 (참)
- ㉡ 두근의 합은 $-\frac{b}{a}$ 이다. (거짓)
- ㉢ $b^2 - 4ac$ 에서 $ac > 0$ 이다.
하지만 $b^2 < 4ac$ 인 경우만 허근을 가짐 (거짓)
- ㉣ 판별식 $b^2 - 4ac$ 에서 $ac < 0$ 이므로 $b^2 - 4ac > 0$ (참)
- ㉤ 두 근의 곱은 $\frac{c}{a}$ 이다. (참)
- ㉥ 실계수 방정식에서 한 근이 $p + qi$ 이면 $p - qi$ 가 또 다른 한 근이다.(거짓)

32. x 에 대한 이차방정식 $x^2 + bx = -(a^2 - 3bx + c^2)$ 이 중근을 가질 때, a, b, c 를 세 변의 길이로 갖는 삼각형은 어떤 삼각형인가?
- ① 둔각삼각형

② a 가 빗변인 직각삼각형

③ b 가 빗변인 직각삼각형

④ $a = b$ 인 이등변삼각형

⑤ $b = c$ 인 이등변삼각형

해설

주어진 식을 정리하면
 $x^2 - 2bx + a^2 + c^2 = 0$ 이
방정식이 중근을 가지므로
 $\frac{D}{4} = (-b)^2 - (a^2 + c^2) = 0$
 $\therefore b^2 = a^2 + c^2$
따라서 b 가 빗변인 직각삼각형이다.

33. 방정식 $x^2 - 4x + y^2 - 8y + 20 = 0$ 을 만족하는 실수 x, y 에 대하여 $x + y$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + y^2 - 8y + 20 &= (x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 0 \\ \therefore x &= 2, y = 4 \\ \therefore x + y &= 6 \end{aligned}$$

해설

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + y^2 - 8y + 20 &= 0 \text{이 실근을 가지므로} \\ D/4 = 4 - (y^2 - 8y + 20) &\geq 0 \\ y^2 - 8y + 16 &\leq 0 \\ (y - 4)^2 &\leq 0, y = 4 \\ \text{준식에 대입하면 } x &= 2 \\ \text{따라서 } x + y &= 6 \end{aligned}$$

34. x 에 관한 이차방정식 $x^2 - 4x - a + b = 0$ 이 중근을 가질 때 $x^2 - 2(a - 1)x + a^2 + 3b = 5a - 4$ 의 근을 판별하면?

- ① 중근
- ② 한 실근과 한 허근
- ③ 서로 다른 두 실근
- ④ 서로 같은 두 실근
- ⑤ 서로 다른 두 허근

해설

이차방정식 $x^2 - 4x - a + b = 0$ 이 중근을 가지려면

$$D' = 4 + a - b = 0$$

$$\therefore b = a + 4$$

$$x^2 - 2(a - 1)x + a^2 + 3b = 5a - 4$$

$$x^2 - 2(a - 1)x + a^2 - 2a + 16 = 0$$

$$D' = (a - 1)^2 - (a^2 - 2a + 16) = -15 < 0$$

$\therefore$ 주어진 이차방정식은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

35. x 에 대한 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가질 때, 다음 [보기]의 이차방정식 중 서로 다른 두 실근을 갖는 것을 모두 고른 것은?

- $\textcirc�$ $ax^2 + 2bx + c = 0$

$\textcirc�$ $ax^2 + \frac{1}{2}bx + c = 0$
- $\textcirc�$ $cx^2 + bx + a = 0$

- ① $\textcirc�$

② $\textcirc�, \textcirc�$

③ $\textcirc�, \textcirc�$
- ④ $\textcirc�, \textcirc�$

⑤ $\textcirc�, \textcirc�, \textcirc�$

해설

$ax^2 + bx + c = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가지므로
 $D = b^2 - 4ac > 0 \cdots$
 $\textcirc�$ $ax^2 + 2bx + c = 0$ 의 판별식은
 $D = (2b)^2 - 4ac = 4b^2 - 4ac$
 $= 3b^2 + (b^2 - 4ac > 0)$
따라서 서로 다른 두 실근을 갖는다.
 $\textcirc�$ [반례] $a = 1, b = 3, c = 2$ 일 때
 $x^2 + 3x + 2 = 0$ 은 서로 다른 두 실근을 갖지만
 $x^2 + \frac{3}{2}x + 2 = 0$ 은 허근을 갖는다.
 $\textcirc�$ $cx^2 + bx + a = 0$ 의 판별식은
 $D = b^2 - 4ac > 0$
따라서 서로 다른 두 실근을 갖는다.

36. 이차방정식 $2x^2 - 4x - 3k = 0$ 이 허근을 갖고, 동시에 $x^2 + 5x - 2k = 0$ 이 실근을 갖도록 하는 정수 k 의 개수를 구하면?

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

$2x^2 - 4x - 3k = 0$ 이 허근을 가질 조건은

$$\frac{D}{4} = 4 + 6k < 0$$

$$\therefore k < -\frac{2}{3} \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$x^2 + 5x - 2k = 0$ 이 실근을 가질 조건은

$$D = 25 + 8k \geq 0$$

$$\therefore k \geq -\frac{25}{8} \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{에서 } -\frac{25}{8} \leq k < -\frac{2}{3}$$

따라서, 정수 $k = -3, -2, -1$

$\therefore$ 정수 k 의 개수는 3개

37. x 에 대한 이차방정식 $x^2 + (2m + a + b)x + m^2 + ab = 0$ 이 m 의 값에 관계없이 항상 중근을 가질 때, 실수 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$x^2 + (2m + a + b)x + m^2 + ab = 0$
항상 중근을 가질 조건 : 판별식 $D = 0$
 $D = (2m + a + b)^2 - 4(m^2 + ab) = 0$
 $4m^2 + a^2 + b^2 + 4ma + 2ab + 4mb - 4m^2 - 4ab = 0$
 m 에 관해 식을 정리하면
 $(4a + 4b)m + (a^2 - 2ab + b^2) = 0$
 $4a + 4b = 0, \quad a^2 - 2ab + b^2 = 0$
 $\therefore a + b = 0$

38. x 에 대한 이차식 $a(1-x^2) - 2bx + c(1+x^2)$ 이 완전제곱식일 때, a, b, c 를 세 변의 길이로 하는 삼각형은 어떤 삼각형인가?

- ① a 를 빗변으로 하는 직각삼각형
- ② b 를 빗변으로 하는 직각삼각형
- ③ c 를 빗변으로 하는 직각삼각형
- ④ 예각삼각형
- ⑤ 정삼각형

해설

$a(1-x^2) - 2bx + c(1+x^2)$ 을 x 에 대한 내림차순으로 정리하면
 $(c-a)x^2 - 2bx + a+c$

위의 식이 완전제곱식이 되려면

$c-a \neq 0$ 이고, $\frac{D}{4} = 0$ 이어야 한다.

$$\frac{D}{4} = b^2 - (c-a)(c+a) = 0$$

$$b^2 - (c^2 - a^2) = 0, \quad b^2 - c^2 + a^2 = 0$$

$$\therefore c^2 = b^2 + a^2$$

따라서 c 를 빗변으로 하는 직각삼각형이다.

39. 이차방정식 $x^2 - 2ix - k = 0$ 의 근에 대한<보기>의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

- ㉠ $k > 1$ 이면 두 근은 실근이다.
- ㉡ $k = 1$ 이면 두 근은 같다.
- ㉢ 두 근의 곱은 실수이다.
- ㉣ $0 < k < 1$ 이면 두 근은 순허수이다.

- ① ㉠, ㉡

② ㉡, ㉣

③ ㉠, ㉡, ㉣
- ④ ㉡, ㉢, ㉣

⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣

해설

근의 공식을 이용하여 $x^2 - 2ix - k = 0$ 의 근을 구하면 $x = i \pm \sqrt{-1+k}$

- ㉠ $k > 1$ 이어도 x 는 허수이다.<거짓>
- ㉡ $k = 1$ 이면 $x = i$ 로 두 근은 같다.<참>
- ㉢ 두 근의 곱 $-k$ 는 허수일 수도 있다.<거짓>
- ㉣ $0 < k < 1$ 이면 $-1 < -1+k < 0$ 이므로 $\sqrt{-1+k} = ai$ 의 형태가 되어 x 는 순허수이다.<참>

40. $x^2 + 3ax + b = 0$ 과 $x^2 - ax + c = 0$ 은 공통근 1을 갖는다. 이 때, $2a^2 + b - c$ 가 최소가 되는 a 의 값은 ?

① -1

② 0

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

조건에서

$$1 + 3a + b = 0 \cdots \textcircled{1}$$

$$1 - a + c = 0 \cdots \textcircled{2}$$

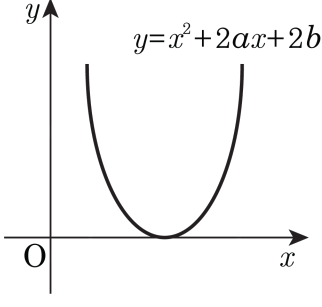
$$\textcircled{1} - \textcircled{2} : 4a + b - c = 0$$

$$\therefore b - c = -4a$$

$$\therefore 2a^2 + b - c = 2a^2 - 4a = 2(a - 1)^2 - 2$$

따라서 $a = 1$ 일 때, 최소이다.

41. 이차함수 $y = x^2 + 2ax + 2b$ 의 그래프가 아래 그림과 같을 때, 방정식 $x^2 - 2ax + b^2 + 2 = 0$ 의 근에 대한 설명으로 옳은 것은?



- ① 서로 다른 양의 실근을 갖는다.
- ② 서로 다른 음의 실근을 갖는다.
- ③ 중근을 갖는다.
- ④ 서로 다른 부호의 실근을 갖는다.
- ⑤ 서로 다른 두 허근을 갖는다.

해설

㉠ 그래프에서 중근이므로 $a^2 - 2b = 0$

㉡ $x^2 - 2ax + b^2 + 2 = 0$

판별식 $\frac{D}{4} = a^2 - b^2 - 2 \leftarrow a^2 = 2b$

$= 2b - b^2 - 2$

$= -(b^2 - 2b + 2)$

$= -(b - 1)^2 - 1 < 0$

$\therefore$ 서로 다른 두 허근을 갖는다.

43. x, y 에 대한 이차식 $2x^2 + xy - y^2 - x + 2y + k$ 가 x, y 에 대한 일차식의 곱으로 인수분해 될 때, 상수 k 의 값은?

- ① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

해설

$2x^2 + xy - y^2 - x + 2y + k$ 를 x 에 대해 정리하면
 $2x^2 + (y - 1)x - y^2 + 2y + k$

이 식이 일차식의 곱으로 인수분해 되려면
판별식이 완전제곱식이 되어야 한다.

$$D = (y - 1)^2 - 4 \times 2(-y^2 + 2y + k)$$
$$= 9y^2 - 18y - 8k + 1$$

이 식이 완전제곱식이므로

$$\frac{D'}{4} = 9^2 + 9(-8k + 1)$$

$$\therefore k = -1$$

해설

일차식의 곱으로 이루어져있으므로, 이차항을 이용하여
 $(2x - y + a)(x + y + b)$ 로 나타낼 수 있다.

전개하면, $2x^2 + xy - y^2 + (a + 2b)x + (a - b)y + ab$ 이고
문제에 주어진 식과 같아야 되므로,

$$\begin{array}{r} a+2b=-1 \\ -) a- \quad b=2 \\ \hline 3b=-3 \end{array}$$

$$\therefore a = 1, \quad b = -1$$

$$\therefore k = ab = -1$$

44. $|1-|1-|1-x|| = x-1$ 을 만족시키는 x 의 최솟값, 최댓값을 각각 m, M 이라 할 때, $m+M$ 의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$x-1 = |1-|1-|1-x|| \geq 0$
 $\therefore x \geq 1$
 $x \geq 1$ 이면 $|1-x| = x-1$
 $\therefore |1-|1-x|| = |1-(x-1)| = |2-x|$
 $1 \leq x \leq 2$ 이면
 $|2-x| = 2-x$ 이므로
(좌변) $= |1-(2-x)|$
 $= |x-1|$
 $= x-1 = (\text{우변})$
 $\therefore 1 \leq x \leq 2$ 인 모든 실수 x
 $\therefore m=1, M=2, \quad M+m=3$

45. 방정식 $|x^2 + (a - 2)x - 2| = 1$ 의 모든 근의 합이 0일 때 상수 a 의 값은?

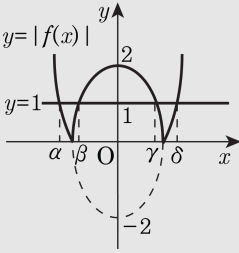
- ① 1
- ② 2
- ③ 3
- ④ 4
- ⑤ 5

해설

$|x^2 + (a - 2)x - 2| = 1 \Leftrightarrow x^2 + (a - 2)x - 2 = \pm 1$
 $x^2 + (a - 2)x - 2 = 1$ 의 두 근을 α, β 라 하면 $\alpha + \beta = -(a - 2)$
... ㉠
 $x^2 + (a - 2)x - 2 = -1$ 의 두 근을 γ, δ 라 하면 $\gamma + \delta = -(a - 2)$
... ㉡
㉠+㉡하면 $\alpha + \beta + \gamma + \delta = -2(a - 2)$
모든 근의 합이 0 이므로 $a - 2 = 0 \therefore a = 2$

해설

$f(x) = x^2 + (a - 2)x - 2$ 라 놓으면 y 절편이 -2 이므로 방정식 $|f(x)| = 1$ 의 근을 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 라 할 때 $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$ 이기
위해서는 $y = |f(x)|$ 의 그래프는 다음 그림과 같이 y 축에 대하여
대칭이다. (우함수)



$\therefore a - 2 = 0, a = 2$

46. 양수 x 에 대하여 $[x] = n$ 이라 할 때, $x^2 + (x - n)^2 = 20$ 이다. 이 때, $2x - n$ 의 값은? (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대 정수)

① $\sqrt{6}$ ② $2\sqrt{6}$ ③ $\sqrt{5}$ ④ $2\sqrt{5}$ ⑤ $\sqrt{10}$

해설

$x - n = \alpha$ 라 하면 $0 \leq \alpha < 1$
 $x^2 = 20 - \alpha^2$ 에서 $19 < x^2 \leq 20$
즉, $\sqrt{19} < x \leq \sqrt{20}$ 이므로 $[x] = n = 4$ 이다.
따라서, 주어진 식은 $x^2 + (x - 4)^2 = 20$ 이 되고,
식을 정리하면 $x^2 - 4x - 2 = 0$
 $\therefore x = 2 + \sqrt{6} (\because x > 0)$
 $\therefore 2x - n = 4 + 2\sqrt{6} - 4 = 2\sqrt{6}$

47. 방정식 $x^3 - 3x + 1 = 0$ 의 한 근을 α , $x^2 - \alpha x + 1 = 0$ 의 한 근을 β 라 할 때, $\beta^3 + \frac{1}{\beta}$ 의 값은?

- ① -2 ② -1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$$\alpha^3 - 3\alpha + 1 = 0 \text{에서 } \alpha^3 - 3\alpha = -1$$

$$\beta^2 - \alpha\beta + 1 = 0 \text{에서 양변을 } \beta \text{로 나누면}$$

$$\beta + \frac{1}{\beta} = \alpha (\because \beta \neq 0)$$

$$\begin{aligned} \therefore \beta^3 + \frac{1}{\beta} &= \left(\beta + \frac{1}{\beta}\right)^3 - 3\beta \cdot \frac{1}{\beta} \left(\beta + \frac{1}{\beta}\right) \\ &= \alpha^3 - 3\alpha = -1 \end{aligned}$$

48. x 에 대한 이차방정식 $2x^2 - 2(1-a-b)x + \{1 + (a+b)^2\} = 0$ 의 근이 실수일 때, $a^3 + b^3 - 3ab + 4$ 의 값을 구하면? (단, a, b 는 실수)

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

실근을 가지므로

$$\begin{aligned}\frac{D}{4} &= (1-a-b)^2 - 2\{1 + (a+b)^2\} \\ &= 1 - 2(a+b) + (a+b)^2 - 2 - 2(a+b)^2 \geq 0\end{aligned}$$

$$\therefore (a+b)^2 + 2(a+b) + 1 \leq 0$$

즉, $(a+b+1)^2 \leq 0$ 이고 a, b 는 실수이므로

$$a+b+1=0$$

$$\therefore a+b=-1$$

$$\therefore a^3 + b^3 - 3ab + 4$$

$$= (a+b)^3 - 3ab(a+b) - 3ab + 4$$

$$= (-1)^3 - 3ab(-1) - 3ab + 4$$

$$= 3$$

49. 세 방정식 $x^2 + 2ax + bc = 0$, $x^2 + 2bx + ca = 0$, $x^2 + 2cx + ab = 0$ 의 근에 대한 다음 설명 중 옳은 것은? (단, a, b, c 는 실수)
- ① 세 방정식은 모두 실근을 갖는다.
 - ② 세 방정식은 모두 허근을 갖는다.
 - ③ 반드시 두 방정식만 실근을 갖는다.
 - ④ 반드시 한 방정식만 실근을 갖는다.
 - ⑤ 적어도 하나의 방정식은 실근을 갖는다.

해설

세 방정식의 판별식을 각각

$$\frac{D_1}{4} = a^2 - bc,$$
$$\frac{D_2}{4} = b^2 - ca,$$
$$\frac{D_3}{4} = c^2 - ab \text{라 하면}$$
$$\frac{D_1}{4} + \frac{D_2}{4} + \frac{D_3}{4}$$
$$= a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$$
$$= \frac{1}{2} \{ (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \} \geq 0$$

따라서, $\frac{D_1}{4}, \frac{D_2}{4}, \frac{D_3}{4}$ 중 적어도 하나는 0보다 크거나 같다.
곧, 적어도 하나의 방정식은 실근을 갖는다.

50. $x^2 + kxy - 2y^2 + 3y - 1$ 이 x, y 에 관한 일차식의 곱으로 인수분해되는 k 의 값을 구하면?

- ① ± 1 ② ± 2 ③ ± 3 ④ ± 4 ⑤ ± 6

해설

$$x^2 + kyx - (2y^2 - 3y + 1) = 0 \text{에서}$$

$$D = k^2y^2 + 4(2y^2 - 3y + 1)$$

$$= (k^2 + 8)y^2 - 12y + 4$$

이 식이 완전제곱식이 되어야 한다.

$$\frac{D}{4} = 36 - 4(k^2 + 8) = 0$$

$$\therefore k = \pm 1$$