1. 이차방정식 $x^2 - x + 4 = 0$ 의 근을 구하면?

① $x = 1 \pm \sqrt{3}$ ② $x = 1 \pm \sqrt{15}$ ③ $x = -1 \pm \sqrt{15}i$

④ $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ ⑤ $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{15}i}{2}$

해설

근의 공식을 이용한다.

$x^2 - x + 4 = 0, \quad x = \dfrac{1 \pm \sqrt{15}i}{2}$

2. 이차방정식 $x^2+4x+k=0$이 허근을 가지도록 상수 k의 값의 범위를 정하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** $k>4$

해설

$$\frac{D}{4}=2^2-k<0$$

$\therefore\ k>4$

3. x에 대한 일차방정식 $(a^2+3)x+1=a(4x+1)$ 의 해가 무수히 많을 때, a의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$(a^2+3-4a)x=a-1$
모든 x에 대해 성립하려면
$a^2-4a+3=0,\ a-1=0$
공통근 : $a=1$

4. 방정식 $|x|+|x-1|=2$의 해를 구하시오.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $-\frac{1}{2}$ 또는 -0.5

▷ 정답 : $\frac{3}{2}$ 또는 1.5

해설

i) $x<0$일 때,

$-x-(x-1)=2$이므로 $-2x+1=2$

$\therefore\ x=-\frac{1}{2}$

ii) $0\le x<1$일 때,

$x-(x-1)=2$이므로 $0\cdot x=1$

$\therefore$ 해가 없다.

iii) $1\le x$일 때,

$x+x-1=2$이므로 $2x=3$

$\therefore\ x=\frac{3}{2}$

(i), (ii), (iii)에서 $x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=\frac{3}{2}$

5. 이차방정식 $x^2 + (k-4)x + k - 1 = 0$ 이 중근을 가지도록 상수 k 의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

판별식을 D 라 하면,
$D = 0$ 일 때 중근을 가지므로
$D = (k-4)^2 - 4(k-1) = k^2 - 12k + 20 = 0$ 에서
$(k-2)(k-10) = 0$
따라서, $k = 2,\ k = 10$ 이므로 k 의 값은 12 이다.

6. x에 대한 이차방정식$(m-1)x^2-2mx+(m+2)=0$이 중근을 갖도록 하는 실수 m의 값과 그 때의 중근을 α라 할 때, $m+\alpha$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

주어진 방정식이 이차방정식이므로 $m \neq 1$ 이고, x의 계수가 $2m$ 이므로

$$\frac{D}{4}=m^2-(m-1)(m+2)=0$$

정리하면, $-m+2=0 \quad \therefore \ m=2$

$m=2$ 를 준식에 대입하면

$x^2-4x+4=0,\ (x-2)^2=0$

$\therefore \ x=2$ (중근 α)

$\therefore m+\alpha=2+2=4$

7. 이차방정식 $x^2 + (a+2)x + 1 = 0$이 중근을 갖도록 하는 모든 실수 a의 값의 합을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

주어진 이차방정식이 중근을 가지려면
$D = (a+2)^2 - 4 = 0$이므로
$a^2 + 4a + 4 - 4 = a^2 + 4a = 0$
따라서 $a = 0$ 또는 $a = -4$
따라서 상수 a의 값의 합은 -4

8. x에 대한 이차방정식 $(k^2-1)x^2-2(k-1)x+1=0$이 허근을 가질 때, $k>m$이다. m의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$(k^2-1)x^2-2(k-1)x+1=0$이
허근을 가지려면

$$\frac{D}{4}=(k-1)^2-(k^2-1)<0$$

$(k^2-2k+1)-(k^2-1)<0$

$-2k+2<0,\ k>1$

$\therefore\ m=1$

9. 계수가 실수인 x에 대한 이차방정식 $x^2+2(a-m-1)x+a^2-b+m^2=0$의 근이 m의 값에 관계없이 항상 중근을 갖도록 하는 a, b값의 합은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$\frac{D}{4}=(a-m-1)^2-(a^2-b+m^2)=0$$

m의 값에 관계없이

$2(-a+1)m+(-2a+b+1)=0$

이어야 하므로

$2(-a+1)=0,\ -2a+b+1=0$

$\therefore a=1,\ b=1$

$\therefore a+b=2$

10. 이차식 $x^2 - 2(k-1)x + 2k^2 - 6k + 4$가 x에 대하여 완전제곱식이 될 때, 상수 k의 값의 합을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 4

해설

이차식이 완전제곱식이 되면
이차방정식 $x^2 - 2(k-1)x + 2k^2 - 6k + 4 = 0$
이 중근을 갖는다.

따라서, $\dfrac{D}{4} = (k-1)^2 - (2k^2 - 6k + 4) = 0$

위의 식을 정리하면

$-k^2 + 4k - 3 = 0$

$k^2 - 4k + 3 = 0$

$(k-1)(k-3) = 0$에서

$k = 1$ 또는 $k = 3$

11. 방정식 $a(ax-1)=2(ax-1)$ 에 대한 설명으로 옳은 것은?

① $a=0$ 일 때, 부정

② $a=2$ 일 때, 불능

③ $a\neq 2$ 일 때, $x=\frac{1}{a}$

④ $a\neq 0$ 일 때, 해는 없다.

⑤ $a\neq 0,\ a\neq 2$ 일 때, $x=\frac{1}{a}$

해설

$a(ax-1)=2(ax-1), a^2x-2ax=a-2$ 에서

$a(a-2)x=a-2$

i) $a\neq 0,\ a\neq 2$ 일 때, $x=\frac{1}{a}$

ii) $a=2$ 일 때, $0\cdot x=0$ 이므로 해는 무수히 많다. (부정)

iii) $a=0$ 일 때, $0\cdot x=-2$ 이므로 해가 없다. (불능)

따라서 옳은 것은 ⑤뿐이다.

12. 방정식 $a^2-(1+x)a+2x-2=0$의 해가 무수히 많을 때, 방정식 $x=(x+3)a-10$의 해는?

① -3 ② -1 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

해설

$a^2-a-ax+2x-2=0$, $(a-2)x=a^2-a-2$

$(a-2)x=(a-2)(a+1)$

ⅰ) $a\neq 2$일 때, $x=a+1$

ⅱ) $a=2$일 때, $0\cdot x=0$ 이므로 해는 무수히 많다.

ⅰ), ⅱ)에서 $a=2$일 때이다.

따라서 방정식 $x=(x+3)a-10$에 $a=2$를 대입하면

$x=(x+3)\cdot 2-10$, $x=2x-4$ $\therefore x=4$

13. 방정식 $|x| + |x - 1| = 9$의 모든 근의 곱을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** -20

해설

$|x| + |x - 1| = 9$에서

ⅰ) $x < 0$일 때,

$-x - x + 1 = 9$

$\therefore\ x = -4$

ⅱ) $0 \le x < 1$일 때,

$x - x + 1 = 9$(성립하지 않음)

ⅲ) $x \ge 1$일 때,

$x + x - 1 = 9$

$\therefore\ x = 5$

따라서 모든 근의 곱은

$(-4) \times 5 = -20$

14. $|x+1|+|x-2|=x+3$을 만족하는 해의 합을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

ⅰ) $x<-1$일 때,

$-x-1-x+2=x+3$

$\therefore\ x=-\dfrac{2}{3}$ (모순)

ⅱ) $-1\le x<2$일 때,

$x+1-x+2=x+3$

$\therefore\ x=0$

ⅲ) $x\ge 2$일 때,

$x+1+x-2=x+3$

$\therefore\ x=4$

15. 방정식$|x-3|+|x-4|=2$의 해의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

i) $x<3$일 때,

$-(x-3)-(x-4)=3,\ -2x=-5$

$\therefore\ x=\dfrac{5}{2}$

ii) $3\le x<4$일 때

$(x-3)-(x-4)=2,\ 0\cdot x=1$

$\therefore$ 해가 없다.

iii) $x\ge 4$일 때

$x-3+x-4=2,\ 2x=9$

$\therefore\ x=\dfrac{9}{2}$

따라서 $x=\dfrac{5}{2},\ \dfrac{9}{2}$이고 그 합은 7

16. 다음 내용은 이차방정식에 대한 설명이다. 괄호 안에 알맞은 것은?

(가)를 계수로 갖는 이차방정식은 (나)의 범위에서 항상 근을 갖는다. 따라서 (다)를 계수로 갖는 이차식 $ax^2 + bx + c$ 는 (라)의 범위에서는 반드시 (마)의 곱으로 인수분해된다.

① (가) 복소수 (나) 복소수 (다) 실수 (라) 실수 (마) 이차식

② (가) 복소수 (나) 실수 (다) 복소수 (라) 실수 (마) 일차식

③ (가) 복소수 (나) 실수 (다) 실수 (라) 복소수 (마) 이차식

④ (가) 실수 (나) 복소수 (다) 실수 (라) 복소수 (마) 이차식

⑤ (가) 실수 (나) 복소수 (다) 실수 (라) 복소수 (마) 일차식

해설

(가) 실수, (나) 복소수, (다) 실수, (라) 복소수, (마) 일차식

17. 다음 방정식을 풀면?

$$(\sqrt{3}-1)x^2-(\sqrt{3}+1)x+2=0$$

① $x=-1$ 또는 $x=-\sqrt{3}$

② $x=-1$ 또는 $x=-\sqrt{3}-1$

③ $x=-1$ 또는 $x=\sqrt{3}+1$

④ $x=1$ 또는 $x=-\sqrt{3}+1$

⑤ $x=1$ 또는 $x=\sqrt{3}+1$

해설

x^2 의 계수를 유리수로 만들기 위해 양변에 $\sqrt{3}+1$을 곱하면

$(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)x^2-(\sqrt{3}+1)^2x+2(\sqrt{3}+1)=0$

$2x^2-2(2+\sqrt{3})x+2(\sqrt{3}+1)=0$

$x^2-(2+\sqrt{3})x+(\sqrt{3}+1)=0$

$(x-1)\left\{x-(\sqrt{3}+1)\right\}=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=\sqrt{3}+1$

18. x에 대한 방정식 $ix^2+(1+i)x+1=0$의 해를 구하여라. (단, $x \neq i$)

▶ **답 :**

▷ **정답 :** -1

해설

양변에 $-i$를 곱하면

$(-i)\cdot ix^2 - i(1+i)x - i = 0$

$x^2+(1-i)x-i=0$

$(x-i)(x+1)=0$

$x \neq i$이므로 $x=-1$

19. 이차방정식 $(1-i)x^2+(-3+i)x+2=0$의 해는 $x=a$ 또는 $x=p+qi$이다. 이 때, $a+p+q$의 값을 구하여라. (단, a, p, q는 실수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$(1-i)x^2+(-3+i)x+2=0$의 양변에 $1+i$를 곱하면

$(1+i)(1-i)x^2+(1+i)(-3+i)x+2(1+i)=0$

$2x^2-2(2+i)x+2(1+i)=0$

$x^2-(2+i)x+1+i=0$

$(x-1)\{x-(1+i)\}=0$

$x=1$ 또는 $x=1+i$

$\therefore a+p+q=3$

20. 이차방정식 $(1-i)x^2+(1+3i)x-2(1+i)=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha^2+\beta^2$의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① -4 ② -3 ③ -2 ④ -1 ⑤ 0

해설

주어진 방정식의 양변에 $1+i$를 곱하면

$(1+i)(1-i)x^2+(1+i)(1+3i)x-2(1+i)(1+i)=0$

$2x^2+(4i-2)x-2(2i)=0$

$x^2+(2i-1)x-2i=0$

$(x+2i)(x-1)=0$

$\therefore x=-2i$ 또는 $x=1$

$\therefore \alpha^2+\beta^2=(-2i)^2+1^2=-3$

21. 다음 방정식의 해는?

$$x^2 + 3|x| - 4 = 0$$

① 0 ② ± 1 ③ $\pm\sqrt{2}$ ④ $\pm\sqrt{3}$ ⑤ ± 2

해설

(i) $x \geq 0$ 일 때 $|x| = x$ 이므로 주어진 방정식은
$x^2 + 3x - 4 = 0, (x+4)(x-1) = 0$
$\therefore x = -4$ 또는 $x = 1$
이 때, $x \geq 0$ 이므로 $x = -4$ 는 부적합
$\therefore x = 1$
(ii) $x < 0$ 일 때 $|x| = -x$ 이므로 주어진 방정식은
$x^2 - 3x - 4 = 0, (x-4)(x+1) = 0$
$x = 4$ 또는 $x = -1$
그런데 $x < 0$ 이므로 $x = -1$
$\therefore x = 1$ 또는 $x = -1$
이 때, $x < 0$ 이므로 $x = 4$ 는 부적합
(i), (ii) 에서 $x = \pm 1$

22. 방정식 $x^2-2|x|-3=0$의 근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

ⅰ) $x \geq 0$일 때

$x^2-2x-3=0$, $(x+1)(x-3)=0$

$x=-1$ 또는 $x=3$

그런데 $x \geq 0$이므로 $x=3$

ⅱ) $x<0$일 때

$x^2+2x-3=0$, $(x-1)(x+3)=0$

$x=1$ 또는 $x=-3$

그런데 $x<0$이므로 $x=-3$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $x=3$ 또는 $x=-3$

따라서 근의 합은 0이다.

23. 방정식 $(x-1)^2+|x-1|-6=0$의 두 근의 합은?

① -1 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 6

해설

(ⅰ) $x \ge 1$일 때
$x^2-2x+1+x-1-6=0$
$x^2-x-6=0$, $(x-3)(x+2)=0$이므로
$x=-2, x=3$
그런데 $x \ge 1$이므로 $x=3$
(ⅱ) $x<1$일 때
$x^2-2x+1-x+1-6=0$
$x^2-3x-4=0, (x-4)(x+1)=0$
$x=-1, x=4$
그런데 $x<1$이므로 $x=-1$
(ⅰ), (ⅱ)에서 $x=3, -1$이므로
두 근의 합은 2

24. 방정식 $x^2 + |x| = |x-1| + 5$를 만족하는 두 근의 곱은?

① $-2\sqrt{6}$ ② $-\sqrt{6}$ ③ 0

④ $\sqrt{6}$ ⑤ $2\sqrt{6}$

해설

ⅰ) $x < 0$일 때

$x^2 - x = -(x-1) + 5,\ x^2 = 6$

$\therefore x = \pm\sqrt{6}$

그런데 $x < 0$이므로 $x = -\sqrt{6}$

ⅱ) $0 \le x < 1$일 때

$x^2 + x = -(x-1) + 5$

$x^2 + 2x - 6 = 0$

$\therefore x = -1 \pm \sqrt{7}$

그런데 $0 \le x < 1$이므로 해가 없다.

ⅲ) $x \ge 1$일 때,

$x^2 + x = x - 1 + 5,\ x^2 = 4$

$\therefore x = \pm 2$

그런데 $x \ge 1$이므로 $x = 2$

ⅰ), ⅱ), ⅲ)에서 주어진 방정식의 해는

$x = 2$ 또는 $x = -\sqrt{6}$이므로

두 근의 곱은 $-2\sqrt{6}$

25. 이차방정식 $x^2 + 2|x| - 8 = 0$의 해는 ?

① $-2,\ 4$ ② $-2,\ 2$ ③ $-4,\ 4$

④ $-4,\ 2$ ⑤ $-4,\ -2,\ 2,\ 4$

해설

$x^2 + 2|x| - 8 = 0$에서

i) $x > 0$일 때,

$x^2 + 2x - 8 = 0,\ (x+4)(x-2) - 0$

$\therefore x = -4$ 또는 $x = 2$

그런데 $x > 0$이므로 $x = 2$

ii) $x < 0$일 때,

$x^2 + 2x - 8 = 0,\ (x-4)(x+2) = 0$

$\therefore x = 4$ 또는 $x = -2$

그런데 $x < 0$이므로 $x = -2$

i), ii) 에서 구하는 해는 $-2,\ 2$

26. 이차방정식 $2[x]^2+3[x]+1=0$의 해를 구하여라. (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① $-1 \le x < 0$ ② $-1 \le x < 1$ ③ $-1 \le x < 2$
④ $0 \le x < 1$ ⑤ $0 \le x < 2$

해설

$2[x]^2+3[x]+1=([x]+1)(2[x]+1)=0$이므로

$[x]=-1$ 또는 $[x]=-\dfrac{1}{2}$

그런데 $[x]$은 정수이므로 $[x]=-1$

$\therefore -1 \le x < 0$

27. 이차방정식 $x^2 - ax + 12 = 0$의 두 근이 3, b일 때, ab의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 28

해설

$x = 3$이 $x^2 - ax + 12 = 0$의 근이므로

$9 - 3a + 12 = 0 \quad \therefore \; a = 7$

이 때 $x^2 - 7x + 12 = 0$에서 $(x - 3)(x - 4) = 0$

그러므로 $x = 3$또는 $x = 4$

$\therefore \; b = 4 \quad \therefore \; ab = 28$

28. $x^2+ax+b=0$, $x^2+2bx+3a=0$를 동시에 만족하는 x는 -1밖에 없을 때, 상수 ab의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$x=-1$은 두 이차방정식 $x^2+ax=b=0$,
$x^2+2bx+3a=0$의 공통근이므로
$1-a+b=0$, $1-2b+3a=0$
두 식을 연립하여 풀면
$a=-3$, $b=-4$
$\therefore ab=12$

29. $x^2-2x+3=0$ 의 두 근을 α, β 라고 할 때, $(\alpha^2-2\alpha)(\beta^2-2\beta)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$x^2-2x+3=0$ 에서 근과 계수의 관계에 의해

$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=3$

$(\alpha^2-2\alpha)(\beta^2-2\beta)$

$=\alpha^2\beta^2-2\alpha^2\beta-2\alpha\beta^2+4\alpha\beta$

$=(\alpha\beta)^2-2\alpha\beta(\alpha+\beta)+4\alpha\beta$

$=9-6\cdot2+12=9$

30. 0 이 아닌 두 실수 a, b에 대하여 $\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = -\sqrt{\dfrac{b}{a}}$가 성립할 때, <보기>의 방정식 중 항상 실근이 존재하는 것을 모두 고른 것은?

보 기

㉠ $x^2 + ax + b = 0$

㉡ $x^2 + bx + a = 0$

㉢ $ax^2 + x + b = 0$

㉣ $bx^2 + ax + b = 0$

① ㉠, ㉡ ② ㉠, ㉣ ③ ㉡, ㉢ ④ ㉡, ㉣ ⑤ ㉢, ㉣

해설

$\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = -\sqrt{\dfrac{b}{a}}$ 이 만족하려면 $b > 0, a < 0$

㉠ $x^2 + ax + b = 0,\ D = a^2 - 4b$

$b \le \dfrac{a^2}{4}$ 일 때만 실근 존재

㉡ $x^2 + bx + a = 0$

$D = b^2 - 4a > 0$ 항상 실근 존재 (○)

㉢ $ax^2 + x + b = 0$

$D = 1 - 4ab > 0$ 항상 실근 존재 (○)

㉣ $bx^2 + ax + b = 0$

$D = a^2 - 4b^2,\ a^2 \ge 4b^2$ 일 때만 실근 존재

31. 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 에 대한 설명으로 다음 <보기> 중 옳은 것의 개수는? (단, a, b, c, p, q 는 실수, $i=\sqrt{-1}$)

보기

㉠ 판별식은 b^2-4ac 이다.

㉡ 두 근의 합은 $\frac{b}{a}$ 이다.

㉢ $a<0$, $c<0$ 이면 허근만 갖는다.

㉣ $a>0$, $c<0$ 이면 서로 다른 두 실근을 갖는다.

㉤ 두 근의 곱은 $\frac{c}{a}$ 이다.

㉥ 한 근이 $p+qi$ 이면 다른 한 근은 $q-pi$ 이다.

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

㉠ 실계수 방정식에서만 판별식을 사용할 수 있다. 현재 a, b, c 가 실수이므로 판별식 사용 가능 (참)

㉡ 두근의 합은 $-\frac{b}{a}$ 이다. (거짓)

㉢ b^2-4ac 에서 $ac>0$ 이다.
하지만 $b^2<4ac$ 인 경우만 허근을 가짐 (거짓)

㉣ 판별식 b^2-4ac 에서 $ac<0$ 이므로 $b^2-4ac>0$ (참)

㉤ 두 근의 곱은 $\frac{c}{a}$ 이다. (참)

㉥ 실계수 방정식에서 한 근이 $p+qi$ 이면 $p-qi$ 가 또 다른 한 근이다.(거짓)

32. x에 대한 이차방정식 $x^2+bx=-(a^2-3bx+c^2)$이 중근을 가질 때, a, b, c를 세 변의 길이로 갖는 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① 둔각삼각형

② a가 빗변인 직각삼각형

③ b가 빗변인 직각삼각형

④ $a=b$인 이등변삼각형

⑤ $b=c$인 이등변삼각형

해설

주어진 식을 정리하면

$x^2-2bx+a^2+c^2=0$이

방정식이 중근을 가지므로

$$\frac{D}{4}=(-b)^2-(a^2+c^2)=0$$

$\therefore b^2=a^2+c^2$

따라서 b가 빗변인 직각삼각형이다.

33. 방정식 $x^2 - 4x + y^2 - 8y + 20 = 0$을 만족하는 실수 $x,\ y$에 대하여 $x + y$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$x^2 - 4x + y^2 - 8y + 20 = (x-2)^2 + (y-4)^2 = 0$

$\therefore\ x = 2,\ y = 4$

$\therefore\ x + y = 6$

해설

$x^2 - 4x + y^2 - 8y + 20 = 0$이 실근을 가지므로

$D/4 = 4 - (y^2 - 8y + 20) \geq 0$

$y^2 - 8y + 16 \leq 0$

$(y-4)^2 \leq 0,\ y = 4$

준식에 대입하면 $x = 2$

따라서 $x + y = 6$

34. x에 관한 이차방정식 $x^2-4x-a+b=0$이 중근을 가질 때 $x^2-2(a-1)x+a^2+3b=5a-4$의 근을 판별하면?

① 중근
② 한 실근과 한 허근
③ 서로 다른 두 실근
④ 서로 같은 두 실근
⑤ 서로 다른 두 허근

해설

이차방정식 $x^2-4x-a+b=0$이 중근을 가지려면
$D'=4+a-b=0$
$\therefore b=a+4$
$x^2-2(a-1)x+a^2+3b=5a-4$
$x^2-2(a-1)x+a^2-2a+16=0$
$D'=(a-1)^2-(a^2-2a+16)=-15<0$
$\therefore$ 주어진 이차방정식은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

35. x에 대한 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 서로 다른 두 실근을 가질 때, 다음 [보기]의 이차방정식 중 서로 다른 두 실근을 갖는 것을 모두 고른 것은?

㉠ $ax^2+2bx+c=0$	㉡ $ax^2+\frac{1}{2}bx+c=0$
㉢ $cx^2+bx+a=0$	

① ㉠　② ㉠, ㉡　③ ㉠, ㉢
④ ㉡, ㉢　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$ax^2+bx+c=0$이 서로 다른 두 실근을 가지므로
$D=b^2-4ac>0\cdots$
㉠ $ax^2+2bx+c=0$의 판별식은
$D=(2b)^2-4ac=4b^2-4ac$
$=3b^2+(b^2-4ac>0)$
따라서 서로 다른 두 실근을 갖는다.
㉡ [반례] $a=1,\ b=3,\ c=2$일 때
$x^2+3x+2=0$은 서로 다른 두 실근을 갖지만
$x^2+\frac{3}{2}x+2=0$은 허근을 갖는다.
㉢ $cx^2+bx+a=0$의 판별식은
$D=b^2-4ac>0$
따라서 서로 다른 두 실근을 갖는다.

36. 이차방정식 $2x^2-4x-3k=0$이 허근을 갖고, 동시에 $x^2+5x-2k=0$이 실근을 갖도록 하는 정수 k의 개수를 구하면?

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

$2x^2-4x-3k=0$이 허근을 가질 조건은

$$\frac{D}{4}=4+6k<0$$

$$\therefore\ k<-\frac{2}{3}\quad \cdots\cdots ㉠$$

$x^2+5x-2k=0$이 실근을 가질 조건은

$$D=25+8k\geq 0$$

$$\therefore\ k\geq -\frac{25}{8}\quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $-\frac{25}{8}\leq k<-\frac{2}{3}$

따라서, 정수 $k=-3,\ -2,\ -1$

$\therefore$ 정수 k의 개수는 3개

37. x에 대한 이차방정식 $x^2+(2m+a+b)x+m^2+ab=0$이 m의 값에 관계없이 항상 중근을 가질 때, 실수 $a+b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$x^2+(2m+a+b)x+m^2+ab=0$

항상 중근을 가질 조건 : 판별식 $D=0$

$D=(2m+a+b)^2-4(m^2+ab)=0$

$4m^2+a^2+b^2+4ma+2ab+4mb-4m^2-4ab=0$

m에 관해 식을 정리하면

$(4a+4b)m+(a^2-2ab+b^2)=0$

$4a+4b=0, \quad a^2-2ab+b^2=0$

$\therefore a+b=0$

38. x에 대한 이차식 $a\left(1-x^2\right)-2bx+c(1+x^2)$이 완전제곱식일 때, a, b, c를 세 변의 길이로 하는 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① a를 빗변으로 하는 직각삼각형

② b를 빗변으로 하는 직각삼각형

③ c를 빗변으로 하는 직각삼각형

④ 예각삼각형

⑤ 정삼각형

해설

$a\left(1-x^2\right)-2bx+c(1+x^2)$을 x에 대한 내림차순으로 정리하면
$(c-a)x^2-2bx+a+c$
위의 식이 완전제곱식이 되려면
$c-a\neq 0$이고, $\dfrac{D}{4}=0$이어야 한다.

$$\frac{D}{4}=b^2-(c-a)(c+a)=0$$

$b^2-(c^2-a^2)=0,\quad b^2-c^2+a^2=0$

$\therefore c^2=b^2+a^2$

따라서 c를 빗변으로 하는 직각삼각형이다.

39. 이차방정식 $x^2-2ix-k=0$의 근에 대한<보기>의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

㉠ $k>1$이면 두 근은 실근이다.

㉡ $k=1$이면 두 근은 같다.

㉢ 두 근의 곱은 실수이다.

㉣ $0<k<1$이면 두 근은 순허수이다.

① ㉠, ㉡　② ㉡, ㉣　③ ㉠, ㉡, ㉢

④ ㉡, ㉢, ㉣　⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣

해설

근의 공식을 이용하여 $x^2-2ix-k=0$ 의 근을 구하면 $x=i\pm\sqrt{-1+k}$

㉠ $k>1$이어도 x는 허수이다.<거짓>

㉡ $k=1$이면 $x=i$로 두 근은 같다.<참>

㉢ 두 근의 곱 $-k$는 허수일 수도 있다.<거짓>

㉣ $0<k<1$이면 $-1<-1+k<0$ 이므로 $\sqrt{-1+k}=ai$ 의 형태가 되어 x는 순허수이다.<참>

40. $x^2+3ax+b=0$과 $x^2-ax+c=0$은 공통근 1을 갖는다. 이 때, $2a^2+b-c$가 최소가 되는 a의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

조건에서

$1+3a+b=0 \cdots$ ㉠

$1-a+c=0 \cdots$ ㉡

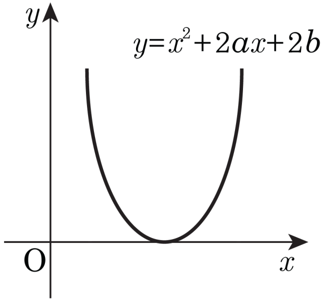
㉠ $-$ ㉡ : $4a+b-c=0$

$\therefore\ b-c=-4a$

$\therefore\ 2a^2+b-c=2a^2-4a=2(a-1)^2-2$

따라서 $a=1$일 때, 최소이다.

41. 이차함수 $y=x^2+2ax+2b$ 의 그래프가 아래 그림과 같을 때, 방정식 $x^2-2ax+b^2+2=0$ 의 근에 대한 설명으로 옳은 것은?



① 서로 다른 양의 실근을 갖는다.

② 서로 다른 음의 실근을 갖는다.

③ 중근을 갖는다.

④ 서로 다른 부호의 실근을 갖는다.

⑤ 서로 다른 두 허근을 갖는다.

해설

㉠ 그래프에서 중근이므로 $a^2-2b=0$

㉡ $x^2-2ax+b^2+2=0$

판별식 $\frac{D}{4}=a^2-b^2-2 \leftarrow a^2=2b$

$=2b-b^2-2$

$=-(b^2-2b+2)$

$=-(b-1)^2-1<0$

$\therefore$ 서로 다른 두 허근을 갖는다.

42. a, b, c가 삼각형의 세 변의 길이를 나타낼 때, $(a+b)x^2+2cx+a-b$는 x의 완전제곱식이다. 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① 정삼각형
② $a=b$인 이등변삼각형
③ $b=c$인 이등변삼각형
④ a가 빗변인 직각삼각형
⑤ c가 빗변인 직각삼각형

해설

$a,\ b,\ c$가 삼각형의 세 변의 길이이므로
$a>0,\ b>0,\ c>0$
따라서, $a+b>0$이므로 준식은 이차식이다.
준식이 완전제곱식이 되려면
판별식 $D=0$

$$\frac{D}{4}=c^2-(a+b)(a-b)=0$$

정리하면, $c^2-a^2+b^2=0$
$\therefore\ a^2=b^2+c^2$
따라서, a가 빗변인 직각삼각형

43. x, y 에 대한 이차식 $2x^2+xy-y^2-x+2y+k$ 가 x, y 에 대한 일차식의 곱으로 인수분해 될 때, 상수 k 의 값은 ?

① -1　　② -2　　③ -3　　④ -4　　⑤ -5

해설

$2x^2+xy-y^2-x+2y+k$를 x 에 대해 정리하면
$2x^2+(y-1)x-y^2+2y+k$
이 식이 일차식의 곱으로 인수분해 되려면
판별식이 완전제곱식이 되어야 한다.

$$D=(y-1)^2-4x2(-y^2+2y+k)$$
$$=9y^2-18y-8k+1$$

이 식이 완전제곱식이므로

$$\frac{D'}{4}=9^2+9(-8k+1)$$

$\therefore k=-1$

해설

일차식의 곱으로 이루어져있으므로, 이차항을 이용하여
$(2x-y+a)(x+y+b)$ 로 나타낼 수 있다.
전개하면, $2x^2+xy-y^2+(a+2b)x+(a-b)y+ab$이고
문제에 주어진 식과 같아야 되므로,

$$\begin{array}{rl} & a+2b=-1 \\ -) & a-\ \ b=2 \\ \hline & 3b=-3 \end{array}$$

$\therefore a=1,\quad b=-1$

$\therefore k=ab=-1$

44. $|1-|1-|1-x||| = x-1$을 만족시키는 x의 최솟값, 최댓값을 각각 m, M이라 할 때, $m+M$의 값을 구하면?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$x-1 = |1-|1-|1-x||| \geq 0$

$\therefore\ x \geq 1$

$x \geq 1$이면 $|1-x| = x-1$

$\therefore |1-|1-x|| = \left|1-(x-1)\right| = |2-x|$

$1 \leq x \leq 2$이면

$|2-x| = 2-x$이므로

$$\begin{aligned}(\text{좌변}) &= \left|1-(2-x)\right| \\ &= |x-1| \\ &= x-1 = (\text{우변})\end{aligned}$$

$\therefore\ 1 \leq x \leq 2$인 모든 실수 x

$\therefore\ m = 1,\ M = 2,\quad M+m = 3$

45. 방정식 $|x^2+(a-2)x-2|=1$의 모든 근의 합이 0일 때 상수 a의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$|x^2+(a-2)x-2|=1 \Leftrightarrow x^2+(a-2)x-2=\pm 1$

$x^2+(a-2)x-2=1$ 의 두 근을 α,β 라 하면 $\alpha+\beta=-(a-2)$ … ㉠

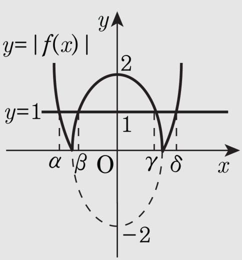
$x^2+(a-2)x-2=-1$ 의 두 근을 γ,δ라 하면 $\gamma+\delta=-(a-2)$ … ㉡

㉠+㉡하면 $\alpha+\beta+\gamma+\delta=-2(a-2)$

모든 근의 합이 0 이므로 $a-2=0$ $\therefore a=2$

해설

$f(x)=x^2+(a-2)x-2$ 라 놓으면 y 절편이 -2 이므로 방정식 $|f(x)|=1$ 의 근을 $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$ 라 할 때 $\alpha+\beta+\gamma+\delta=0$ 이기 위해서는$y=|f(x)|$ 의 그래프는 다음 그림과 같이 y 축에 대하여 대칭이다. (우함수)



$\therefore\ a-2=0,\ a=2$

46. 양수 x에 대하여 $[x]=n$이라 할 때, $x^2+(x-n)^2=20$이다. 이 때, $2x-n$의 값은? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대 정수)

① $\sqrt{6}$ ② $2\sqrt{6}$ ③ $\sqrt{5}$ ④ $2\sqrt{5}$ ⑤ $\sqrt{10}$

해설

$x-n=\alpha$라 하면 $0 \le \alpha < 1$

$x^2=20-\alpha^2$에서 $19 < x^2 \le 20$

즉, $\sqrt{19} < x \le \sqrt{20}$이므로 $[x]=n=4$이다.

따라서, 주어진 식은 $x^2+(x-4)^2=20$이 되고,

식을 정리하면 $x^2-4x-2=0$

$\therefore\ x=2+\sqrt{6}(\because x>0)$

$\therefore\ 2x-n=4+2\sqrt{6}-4=2\sqrt{6}$

47. 방정식 $x^3-3x+1=0$의 한 근을 α, $x^2-\alpha x+1=0$의 한 근을 β라 할 때, $\beta^3+\frac{1}{\beta}^{3}$ 의 값은?

① -2　② -1　③ 2　④ 3　⑤ 4

해설

$\alpha^3-3\alpha+1=0$에서 $\alpha^3-3\alpha=-1$

$\beta^2-\alpha\beta+1=0$에서 양변을 β로 나누면

$$\beta+\frac{1}{\beta}=\alpha(\because \beta\neq 0)$$

$$\therefore \beta^3+\frac{1}{\beta}^{3}=\left(\beta+\frac{1}{\beta}\right)^3-3\beta\cdot\frac{1}{\beta}\left(\beta+\frac{1}{\beta}\right)$$

$$=\alpha^3-3\alpha=-1$$

48. x에 대한 이차방정식 $2x^2-2(1-a-b)x+\{1+(a+b)^2\}=0$의 근이 실수일 때, $a^3+b^3-3ab+4$의 값을 구하면? (단, a, b는 실수)

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

실근을 가지므로

$$\frac{D}{4}=(1-a-b)^2-2\{1+(a+b)^2\}$$
$$=1-2(a+b)+(a+b)^2-2-2(a+b)^2\geq 0$$
$$\therefore\ (a+b)^2+2(a+b)+1\leq 0$$

즉, $(a+b+1)^2\leq 0$이고 $a,\ b$는 실수이므로

$$a+b+1=0$$
$$\therefore\ a+b=-1$$
$$\therefore\ a^3+b^3-3ab+4$$
$$=(a+b)^3-3ab(a+b)-3ab+4$$
$$=(-1)^3-3ab(-1)-3ab+4$$
$$=3$$

49. 세 방정식 $x^2+2ax+bc=0,\ x^2+2bx+ca=0,\ x^2+2cx+ab=0$ 의 근에 대한 다음 설명 중 옳은 것은? (단, $a,\ b,\ c$는 실수)

① 세 방정식은 모두 실근을 갖는다.

② 세 방정식은 모두 허근을 갖는다.

③ 반드시 두 방정식만 실근을 갖는다.

④ 반드시 한 방정식만 실근을 갖는다.

⑤ 적어도 하나의 방정식은 실근을 갖는다.

해설

세 방정식의 판별식을 각각

$$\frac{D_1}{4}=a^2-bc,$$

$$\frac{D_2}{4}=b^2-ca,$$

$\dfrac{D_3}{4}=c^2-ab$라 하면

$$\frac{D_1}{4}+\frac{D_2}{4}+\frac{D_3}{4}$$

$$=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$$

$$=\frac{1}{2}\left\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right\}\geq 0$$

따라서, $\dfrac{D_1}{4},\ \dfrac{D_2}{4},\ \dfrac{D_3}{4}$ 중 적어도 하나는 0보다 크거나 같다.

곧, 적어도 하나의 방정식은 실근을 갖는다.

50. $x^2+kxy-2y^2+3y-1$ 이 x, y 에 관한 일차식의 곱으로 인수분해되는 k 의 값을 구하면?

① ±1 ② ±2 ③ ±3 ④ ±4 ⑤ ±6

해설

$x^2+kyx-(2y^2-3y+1)=0$에서

$D=k^2y^2+4(2y^2-3y+1)$

$\quad=(k^2+8)y^2-12y+4$

이 식이 완전제곱식이 되어야 한다.

$\dfrac{D}{4}=36-4(k^2+8)=0$

$\therefore k=\pm1$