

1. 방정식 $|x+1| + \sqrt{(x-2)^2} = x+3$ 의 근을 α, β 라 할 때 $\alpha + \beta$ 의 값을 구하면?

① 0 ② 4 ③ 3 ④ 2 ⑤ 1

해설

i) $x < -1$ 일 때,
 $-(x+1) - (x-2) = x+3$
 $\therefore x = -\frac{2}{3}$ ($x < -1$ 에 부적합)
ii) $-1 \leq x < 2$ 일 때,
 $x+1 - (x-2) = x+3$
 $\therefore x = 0$
iii) $x \geq 2$ 일 때,
 $x+1 + x-2 = x+3$
 $\therefore x = 4$
(i), (ii), (iii)에 의해 $x = 0, 4$
 $\therefore \alpha + \beta = 4$

2. 구간 $0 < x < 5$ 에서 $x = \frac{1}{x - [x]}$ 를 만족시키는 x 의 개수는? (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수)

- ① 2개
- ② 3개
- ③ 4개
- ④ 5개
- ⑤ 무수히 많다.

해설

$x - [x] \neq 0$ 이므로 x 는 정수가 아니다.
주어진 식의 양변에 $x - [x]$ 를 곱하면
 $x^2 - x[x] - 1 = 0$
(i) $0 < x < 1$ 일 때 $[x] = 0, x^2 - 1 = 0$
 $\therefore x = \pm 1$, 이 값은 $0 < x < 1$ 에 속하지 않는다.
 $\therefore$ 해가 없다.
(ii) $1 < x < 2$ 일 때 $[x] = 1, x^2 - x - 1 = 0$
 $\therefore x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$
 $1 < x < 2$ 이므로 $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$
(iii) $2 < x < 3$ 일 때 $[x] = 2$
 $\therefore x^2 - 2x - 1 = 0$
 $\therefore x = 1 \pm \sqrt{1+1} = 1 \pm \sqrt{2}$
 $2 < x < 3$ 이므로 $x = 1 + \sqrt{2}$
(iv) $3 < x < 4$ 일 때 $[x] = 3$
 $\therefore x^2 - 3x - 1 = 0$
 $\therefore x = \frac{3 \pm \sqrt{9+4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$
 $3 < x < 4$ 이므로 $x = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}$
(v) $4 < x < 5$ 일 때 $[x] = 4$
 $\therefore x^2 - 4x - 1 = 0$
 $x = 2 \pm \sqrt{4+1} = 2 \pm \sqrt{5}$
 $4 < x < 5$ 이므로 $x = 2 + \sqrt{5}$
(i), (ii), (iii), (iv), (v)에서 x 의 개수는 4개

3. 이차식 $x^2 - xy - 2y^2 - ax - 3y - 1$ 이 x, y 에 관한 두 일차식의 곱으로 인수분해 되는 모든 상수 a 의 값의 합은?

- ① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

해설

(주어진 식)=0이라 놓고 x 에 관하여 정리하면

$$x^2 - (a + y)x - (2y^2 + 3y + 1) = 0$$

근의 공식에서

$$\begin{aligned} x &= \frac{a + y \pm \sqrt{(a + y)^2 + 4(2y^2 + 3y + 1)}}{2} \\ &= \frac{a + y \pm \sqrt{9y^2 + 2(a + 6)y + a^2 + 4}}{2} \end{aligned}$$

주어진 식이 x, y 에 관한 일차식으로 인수분해되려면 근호 안의 식($=D$)이 완전제곱 꼴이어야 한다.

$D = 9y^2 + 2(a + 6)y + a^2 + 4$ 의 판별식이 0이 되어야 하므로

$$\frac{D'}{4} = (a + 6)^2 - 9(a^2 + 4) = -8a^2 + 12a = 0$$

$$\therefore a = 0 \text{ 또는 } a = \frac{3}{2}$$

$$\therefore 0 + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

4. 이차함수 $y = -x^2 - 2kx + 4k$ 의 최댓값이 M 일 때, M 의 최솟값을 구하면?

① 1 ② -2 ③ 3 ④ -4 ⑤ 5

해설

$$y = -x^2 - 2kx + 4k = -(x + k)^2 + k^2 + 4k$$

$$M = k^2 + 4k \text{ 이므로}$$

$$M = (k + 2)^2 - 4 \text{ 이다.}$$

따라서 M 의 최솟값은 -4 이다.

5. x, y 가 실수일 때, $2x^2 - 8x + y^2 + 2y + 6$ 의 최솟값은?

① -5

② -3

③ -1

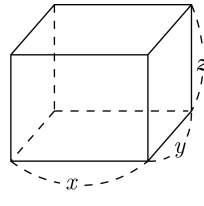
④ 1

⑤ 3

해설

$$\begin{aligned} & 2x^2 - 8x + y^2 + 2y + 6 \\ &= 2(x^2 - 4x) + (y^2 + 2y) + 6 \\ &= 2(x - 2)^2 + (y + 1)^2 - 3 \\ & x, y \text{ 는 실수이므로 } (x - 2)^2 \geq 0, (y + 1)^2 \geq 0 \\ & \therefore 2x^2 - 8x + y^2 + 2y + 6 \geq -3 \\ & \text{따라서, } x = 2, y = -1 \text{ 일 때 최솟값은 } -3 \text{ 이다.} \end{aligned}$$

6. 다음 그림과 같이 가로 길이, 세로 길이, 높이가 x, y, z 인 직육면체의 12 개의 모서리의 길이가 평균이 8, 표준편차가 2 이다. 이 때, 6 개면의 넓이의 평균은?



- ① 53 ② 56 ③ 59
 ④ 62 ⑤ 65

해설

$$\frac{4(x+y+z)}{12} = 8 \Rightarrow x+y+z = 24$$

$$\frac{4(x^2+y^2+z^2)}{12} - 8^2 = 4$$

$$\Rightarrow x^2+y^2+z^2 = 204$$

$$xy+yz+zx = \frac{(x+y+z)^2 - (x^2+y^2+z^2)}{2} = 186$$

$$\frac{2(xy+yz+zx)}{6} = \frac{xy+yz+zx}{3} = \frac{186}{3} = 62$$

7. 방정식 $2x^2 - 4xy + 5y^2 - 8x - 4y + 20 = 0$ 을 만족하는 실수 x, y 의 값은?

- ① $x = 2, y = 4$ ② $x = 4, y = 2$ ③ $x = -1, y = 2$
④ $x = 2, y = -1$ ⑤ $x = -2, y = 1$

해설

판별식을 이용하기 위해 준식을 x 에 관하여 정리하면,
 $2x^2 - 4(y+2)x + 5y^2 - 4y + 20 = 0 \cdots \textcircled{1}$

①이 실근을 가지므로 $\frac{D}{4} \geq 0$ 에서

$$4(y+2)^2 - 10y^2 + 8y - 40 \geq 0$$

$$6y^2 - 24y + 24 \leq 0$$

$$6(y^2 - 4y + 4) \leq 0$$

$$6(y-2)^2 \leq 0 \quad \therefore y = 2 \quad (\because y \text{ 는 실수})$$

$y = 2$ 를 ①에 대입하면,

$$2x^2 - 16x + 32 = 0, \quad 2(x-4)^2 = 0$$

$$\therefore x = 4$$

8. $x^3 - 3x + 2 = 0$ 의 한 근이 a 이고, $x^2 - ax + 1 = 0$ 의 두 근이 b, c 일 때, $b^3 + c^3$ 의 값은?

① -1

② 1

③ -2

④ 27

⑤ 0

해설

a 는 $x^3 - 3x + 2 = 0$ 의 한 근이므로

$$a^3 - 3a + 2 = 0$$

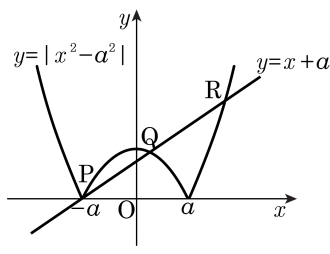
b, c 는 $x^2 - ax + 1 = 0$ 의 두 근이므로

$$b + c = a, \quad bc = 1$$

$$\begin{aligned} \therefore b^3 + c^3 &= (b + c)^3 - 3bc(b + c) \\ &= a^3 - 3a = -2 \end{aligned}$$

9. 다음 그림과 같이 함수 $y = |x^2 - a^2|$ 의 그래프와 직선 $y = x + a$ 가 세 점, P, Q, R에서 만난다. $\overline{PQ} \cdot \overline{QR} = 12$ 일 때, 양수 a 의 값은?

- ① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$
 ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$



해설

점 Q는 $y = -x^2 + a^2$ 의 그래프와

직선 $y = x + a$ 의 교점이므로

$$-x^2 + a^2 = x + a \text{ 에서}$$

$$x^2 + x - a^2 + a = 0$$

$$(x + a)(x - a + 1) = 0$$

$$\therefore x = -a \text{ 또는 } x = a - 1$$

$$\therefore Q(a - 1, 2a - 1)$$

점 R는 $y = x^2 - a^2$ 의 그래프와

직선 $y = x + a$ 의 교점이므로

$$x^2 - a^2 = x + a \text{ 에서}$$

$$x^2 - x - a^2 - a = 0$$

$$(x + a)(x - a - 1) = 0$$

$$\therefore x = -a \text{ 또는 } x = a + 1$$

$$\therefore R(a + 1, 2a + 1)$$

점 P의 좌표는 $(-a, 0)$ 이므로

$$\overline{PQ} = \sqrt{(2a - 1)^2 + (2a - 1)^2} = \sqrt{2} |2a - 1|$$

$$\overline{QR} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

$$\overline{PQ} \cdot \overline{QR} = 12 \text{ 이므로}$$

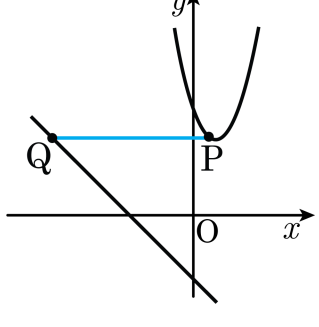
$$\sqrt{2} |2a - 1| \cdot 2\sqrt{2} = 12, \quad |2a - 1| = 3$$

$$\therefore 2a - 1 = 3 \text{ 또는 } 2a - 1 = -3$$

$$\therefore a = 2 \text{ 또는 } a = -1$$

그런데 $a > 0$ 이므로 $a = 2$

10. 다음 그림에서 포물선 $y = x^2 - 3x + 7$ 위의 한 점 P 와 직선 $y = -x - 4$ 위의 한 점 Q 에 대하여 PQ 가 x 축에 평행할 때, PQ 의 최솟값을 구하면?



- ① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

$y = x^2 - 3x + 7$ 에서 점 P 의 좌표는 $P(a, a^2 - 3a + 7)$
 $y = -x - 4$ 에서 점 Q 의 좌표는 $Q(b, -b - 4)$
점 P 와 점 Q 의 y 좌표가 같으므로
 $a^2 - 3a + 7 = -b - 4, b = -a^2 + 3a - 11$ 이다.
 $\overline{PQ} = a - b = a^2 - 2a + 11 = (a - 1)^2 + 10$
 $\overline{PQ}$ 의 최솟값은 10 이다.

11. 지면으로부터 20 m 높이의 옥상에서 초속 20 m 로 쏘아 올린 물체의 t 초 후의 높이를 h m 라 할 때, 관계식 $h = 20t - t^2 + 20$ 이 성립한다. 높이가 가장 높을 때는 던진 후 몇 초 후인가?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$$\begin{aligned} h &= 20t - t^2 + 20 \\ &= -(t^2 - 20t) + 20 \\ &= -(t - 10)^2 + 120 \end{aligned}$$

따라서 $t = 10$ 일 때 최댓값 120 를 가진다.

12. $x^3 + ax + 1 = 0$ 의 세 근을 α, β, γ 라 할 때, $\frac{\beta + \gamma}{\alpha^2}, \frac{\gamma + \alpha}{\beta^2}, \frac{\alpha + \beta}{\gamma^2}$ 를 세 근으로 하는 삼차방정식은?

- ① $x^3 - ax^2 - 1 = 0$
- ② $x^3 - ax^2 + 1 = 0$
- ③ $x^3 + ax^2 - 1 = 0$
- ④ $x^3 + ax^2 + 1 = 0$
- ⑤ $x^3 + ax - 1 = 0$

해설

$x^3 + ax + 1 = 0$ 의 세 근이 α, β, γ 이므로
근과 계수와의 관계에 의해서
 $\alpha + \beta + \gamma = 0,$
 $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = a, \alpha\beta\gamma = -1$
 $\therefore \frac{\beta + \gamma}{\alpha^2} = -\frac{\alpha}{\alpha^2} = -\frac{1}{\alpha}$
같은 방법으로 $\frac{\gamma + \alpha}{\beta^2} = -\frac{\beta}{\beta^2} = -\frac{1}{\beta},$
 $\frac{\alpha + \beta}{\gamma^2} = -\frac{\gamma}{\gamma^2} = -\frac{1}{\gamma}$
 $\left(-\frac{1}{\alpha}\right) + \left(-\frac{1}{\beta}\right) + \left(-\frac{1}{\gamma}\right)$
 $= -\frac{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma} = a$
 $\left(-\frac{1}{\alpha}\right)\left(-\frac{1}{\beta}\right) + \left(-\frac{1}{\beta}\right)\left(-\frac{1}{\gamma}\right) + \left(-\frac{1}{\gamma}\right)\left(-\frac{1}{\alpha}\right)$
 $= \frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\beta\gamma} + \frac{1}{\gamma\alpha} = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{\alpha\beta\gamma} = 0$
 $\left(-\frac{1}{\alpha}\right)\left(-\frac{1}{\beta}\right)\left(-\frac{1}{\gamma}\right) = -\frac{1}{\alpha\beta\gamma} = 1$
따라서, 구하는 삼차방정식은
 $x^3 - ax^2 - 1 = 0$ 이다.

13. 실수 a 가 $0 < a < 2$ 이고, x, y 가 연립방정식

$$\begin{cases} 4x - ay = 16 \\ ax - y = a^3 \end{cases} \quad \text{을 만족시킬 때,}$$

$\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}$ 의 값을 구하면?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$\begin{cases} 4x - ay = 16 & \cdots \textcircled{A} \\ ax - y = a^3 & \cdots \textcircled{B} \end{cases}$$

$\textcircled{B}$ 에서 $y = ax - a^3 \quad \cdots \textcircled{C}$

$\textcircled{C}$ 식을 $\textcircled{A}$ 식에 대입하면 $4x - a(ax - a^3) = 16$

$(4 - a^2)x = 16 - a^4$

$\therefore x = 4 + a^2 \quad (\because a \neq \pm 2)$

$\therefore y = a(4 + a^2) - a^3 = 4a$

$$\begin{aligned} \therefore \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} &= \sqrt{(a+2)^2} + \sqrt{(a-2)^2} \\ &= a + 2 - (a - 2) \\ &\quad (\because 0 < a < 2) \\ &= 4 \end{aligned}$$

14. 어떤 문자도 0 은 아니고, $xy = a$, $xz = b$, $yz = c$ 라고 할 때, $x^2 + y^2 + z^2$ 은?

① $\frac{ab + ac + bc}{abc}$

② $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{abc}$

③ $\frac{(a + b + c)^2}{abc}$

④ $\frac{(ab + ac + bc)^2}{abc}$

⑤ $\frac{(ab)^2 + (ac)^2 + (bc)^2}{abc}$

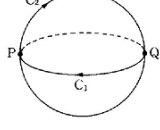
해설

$$abc = x^2 y^2 z^2 = x^2 c^2, x^2 = \frac{ab}{c}$$

$$\text{마찬가지로, } y^2 = \frac{ac}{b}, z^2 = \frac{bc}{a}$$

$$\begin{aligned} \therefore x^2 + y^2 + z^2 &= \frac{ab}{c} + \frac{ac}{b} + \frac{bc}{a} \\ &= \frac{(ab)^2 + (ac)^2 + (bc)^2}{abc} \end{aligned}$$

15. 다음 그림과 같이 $\overline{PQ}$ 를 지름으로 하는 구가 있다. 두 마리의 개미가 $50(\text{cm}/\text{분})$, $70(\text{cm}/\text{분})$ 의 속력으로 각각 C_1 , C_2 의 방향으로 구면의 길을 따라 계속 움직인다. P 지점에서 동시에 출발하여 10분 후에 처음으로 Q 지점에서 만났을 때, 이 구의 반지름은? (단, C_1 , C_2 는 이 구의 대원이다.)



- ① $\frac{50}{\pi} \text{ cm}$ ② $\frac{70}{\pi} \text{ cm}$ ③ $\frac{90}{\pi} \text{ cm}$
 ④ $\frac{100}{\pi} \text{ cm}$ ⑤ $\frac{120}{\pi} \text{ cm}$

해설

구의 반지름을 r 이라 하면,
 10분 동안 개미가 움직인 거리는
 $50 \times 10 = (2m + 1)\pi r \dots\dots \textcircled{1}$,
 $70 \times 10 = (2n + 1)\pi r \dots\dots \textcircled{2}$
 ($\because m, n$ 은 자연수)
 $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 에 대하여 정리하면
 $5n - 7m = 1 \dots\dots \textcircled{3}$
 $\textcircled{3}$ 을 만족하는 최소의 자연수는
 $m = 2, n = 3$ 일 때이다.
 $\therefore m = 2$ 를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면
 $500 = 5\pi r$
 $\therefore r = \frac{100}{\pi} \text{ cm}$