**1.** 방정식 $|x+1|+\sqrt{(x-2)^2}=x+3$의 근을 $\alpha, \beta$라 할 때 $\alpha+\beta$의 값을 구하면?

① 0 ② 4 ③ 3 ④ 2 ⑤ 1

해설

i ) $x<-1$일 때,

$-(x+1)-(x-2)=x+3$

$\therefore\ x=-\frac{2}{3}$ ($x<-1$에 부적합)

ii ) $-1 \le x < 2$일 때,

$x+1-(x-2)=x+3$

$\therefore\ x=0$

iii) $x \ge 2$일 때,

$x+1+x-2=x+3$

$\therefore\ x=4$

( i ), ( ii ), (iii)에 의해 $x=0,\ 4$

$\therefore\ \alpha+\beta=4$

**2.** 구간 $0 < x < 5$에서 $x = \dfrac{1}{x - [x]}$를 만족시키는 $x$의 개수는? (단, $[x]$는 $x$보다 크지 않은 최대의 정수)

① 2개 ② 3개 ③ 4개

④ 5개 ⑤ 무수히 많다.

해설

$x - [x] \neq 0$이므로 $x$는 정수가 아니다.
주어진 식의 양변에 $x - [x]$를 곱하면
$x^2 - x[x] - 1 = 0$
( i ) $0 < x < 1$일 때 $[x] = 0$, $x^2 - 1 = 0$
$\therefore\ x = \pm 1$, 이 값은 $0 < x < 1$에 속하지 않는다.
$\therefore$해가 없다.
( ii ) $1 < x < 2$일 때 $[x] = 1$, $x^2 - x - 1 = 0$

$$\therefore\ x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$1 < x < 2$이므로 $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$
(iii) $2 < x < 3$일 때 $[x] = 2$
$\therefore\ x^2 - 2x - 1 = 0$
$\therefore\ x = 1 \pm \sqrt{1+1} = 1 \pm \sqrt{2}$
$2 < x < 3$이므로 $x = 1 + \sqrt{2}$
(iv) $3 < x < 4$일 때 $[x] = 3$
$\therefore\ x^2 - 3x - 1 = 0$

$$\therefore\ x = \frac{3 \pm \sqrt{9+4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$3 < x < 4$이므로 $x = \dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$
( v ) $4 < x < 5$일 때 $[x] = 4$
$\therefore\ x^2 - 4x - 1 = 0$
$x = 2 \pm \sqrt{4+1} = 2 \pm \sqrt{5}$
$4 < x < 5$이므로 $x = 2 + \sqrt{5}$
( i ), ( ii ), (iii), (iv), ( v )에서 $x$의 개수는 4개

**3.** 이차식 $x^2 - xy - 2y^2 - ax - 3y - 1$ 이 $x,\ y$ 에 관한 두 일차식의 곱으로 인수분해 되는 모든 상수 $a$ 의 값의 합은?

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

해설

(주어진 식)$= 0$ 이라 놓고 $x$에 관하여 정리하면

$x^2 - (a+y)x - (2y^2 + 3y + 1) = 0$

근의 공식에서

$$x = \frac{a + y \pm \sqrt{(a+y)^2 + 4(2y^2 + 3y + 1)}}{2}$$

$$= \frac{a + y \pm \sqrt{9y^2 + 2(a+6)y + a^2 + 4}}{2}$$

주어진 식이 $x,\ y$에 관한 일차식으로 인수분해되려면 근호 안의 식$(= D)$ 이 완전제곱 꼴이어야 한다.

$D = 9y^2 + 2(a+6)y + a^2 + 4$ 의 판별식이 0 이 되어야 하므로

$$\frac{D'}{4} = (a+6)^2 - 9(a^2+4) = -8a^2 + 12a = 0$$

$$\therefore\ a = 0 \text{ 또는 } a = \frac{3}{2}$$

$$\therefore\ 0 + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

**4.** 이차함수 $y = -x^2 - 2kx + 4k$ 의 최댓값이 $M$ 일 때, $M$ 의 최솟값을 구하면?

① 1 ② $-2$ ③ 3 ④ $-4$ ⑤ 5

해설

$y = -x^2 - 2kx + 4k = -(x+k)^2 + k^2 + 4k$
$M = k^2 + 4k$ 이므로
$M = (k+2)^2 - 4$ 이다.
따라서 $M$ 의 최솟값은 $-4$ 이다.

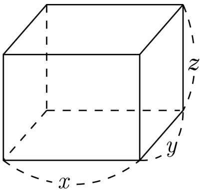
**5.** $x,\ y$ 가 실수일 때, $2x^2-8x+y^2+2y+6$ 의 최솟값은?

① $-5$　② $-3$　③ $-1$　④ $1$　⑤ $3$

해설

$2x^2-8x+y^2+2y+6$
$=2\left(x^2-4x\right)+\left(y^2+2y\right)+6$
$=2(x-2)^2+(y+1)^2-3$
$x,\ y$ 는 실수이므로 $(x-2)^2\ge 0$ , $(y+1)^2\ge 0$
$\therefore 2x^2-8x+y^2+2y+6\ge -3$
따라서, $x=2,\ y=-1$ 일 때 최솟값은 $-3$ 이다.

**6.** 다음 그림과 같이 가로의 길이, 세로의 길이, 높이가 $x$, $y$, $z$ 인 직육면체의 12 개의 모서리의 길이가 평균이 8 , 표준편차가 2 이다. 이 때, 6 개면의 넓이의 평균은?




① 53 ② 56 ③ 59

④ 62 ⑤ 65

해설

$$\frac{4(x+y+z)}{12}=8 \Rightarrow x+y+z=24$$

$$\frac{4(x^2+y^2+z^2)}{12}-8^2=4$$

$$\Rightarrow x^2+y^2+z^2=204$$

$$xy+yz+zx=\frac{(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)}{2}=186$$

$$\frac{2(xy+yz+zx)}{6}=\frac{xy+yz+zx}{3}=\frac{186}{3}=62$$

**7.** 방정식 $2x^2-4xy+5y^2-8x-4y+20=0$ 을 만족하는 실수 $x, y$ 의 값은?

① $x=2,\ y=4$ ② $x=4,\ y=2$ ③ $x=-1,\ y=2$

④ $x=2,\ y=-1$ ⑤ $x=-2,\ y=1$

해설

판별식을 이용하기 위해 준식을 $x$ 에 관하여 정리하면,

$2x^2-4(y+2)x+5y^2-4y+20=0\cdots$ ①

①이 실근을 가지므로 $\dfrac{D}{4}\geq 0$ 에서

$4(y+2)^2-10y^2+8y-40\geq 0$

$6y^2-24y+24\leq 0$

$6(y^2-4y+4)\leq 0$

$6(y-2)^2\leq 0$ $\therefore y=2$ ($\because$ $y$ 는 실수)

$y=2$ 를 ①에 대입하면,

$2x^2-16x+32=0,\ \ 2(x-4)^2=0$

$\therefore\ x=4$

**8.** $x^3-3x+2=0$의 한 근이 $a$이고, $x^2-ax+1=0$의 두 근이 $b,\ c$일 때, $b^3+c^3$의 값은?

① $-1$ ② $1$ ③ $-2$ ④ $27$ ⑤ $0$

해설

$a$는 $x^3-3x+2=0$의 한 근이므로

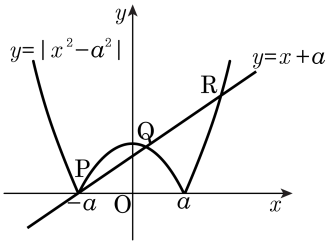
$a^3-3a+2=0$

$b,\ c$는 $x^2-ax+1=0$의 두 근이므로

$b+c=a,\ bc=1$

$$\begin{aligned}\therefore\ b^3+c^3&=(b+c)^3-3bc(b+c)\\&=a^3-3a=-2\end{aligned}$$

**9.** 다음 그림과 같이 함수 $y=|x^2-a^2|$의 그래프와 직선 $y=x+a$가 세 점, P, Q, R에서 만난다. $\overline{PQ}\cdot\overline{QR}=12$일 때, 양수 $a$의 값은?

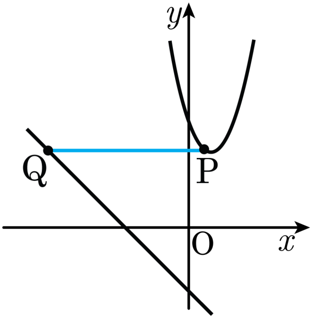



① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$
④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

**해설**

점 Q는 $y=-x^2+a^2$의 그래프와
직선 $y=x+a$의 교점이므로
$-x^2+a^2=x+a$에서
$x^2+x-a^2+a=0$
$(x+a)(x-a+1)=0$
$\therefore x=-a$ 또는 $x=a-1$
$\therefore \mathrm{Q}(\mathrm{a}-1,\ 2\mathrm{a}-1)$
점 R는 $y=x^2-a^2$의 그래프와
직선 $y=x+a$의 교점이므로
$x^2-a^2=x+a$에서
$x^2-x-a^2-a=0$
$(x+a)(x-a-1)=0$
$\therefore x=-a$ 또는 $x=a+1$
$\therefore \mathrm{R}(a+1,\ 2a+1)$
점 P의 좌표는 $(-a,\ 0)$이므로
$\overline{PQ}=\sqrt{(2a-1)^2+(2a-1)^2}=\sqrt{2}\,|2a-1|$
$\overline{QR}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$
$\overline{PQ}\cdot\overline{QR}=12$이므로
$\sqrt{2}\,|2a-1|\cdot 2\sqrt{2}=12,\quad |2a-1|=3$
$\therefore 2a-1=3$ 또는 $2a-1=-3$
$\therefore a=2$ 또는 $a=-1$
그런데 $a>0$이므로 $a=2$

**10.** 다음 그림에서 포물선 $y=x^2-3x+7$ 위의 한 점 P 와 직선 $y=-x-4$ 위의 한 점 Q 에 대하여 $\overline{PQ}$ 가 $x$ 축에 평행할 때, $\overline{PQ}$ 의 최솟값을 구하면?




① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

$y=x^2-3x+7$ 에서 점 P 의 좌표는 $P(a, a^2-3a+7)$

$y=-x-4$ 에서 점 Q 의 좌표는 $Q(b,\ -b-4)$

점 P 와 점 Q 의 $y$ 좌표가 같으므로

$a^2-3a+7=-b-4,\ b=-a^2+3a-11$ 이다.

$\overline{PQ}=a-b=a^2-2a+11=(a-1)^2+10$

$\overline{PQ}$ 의 최솟값은 10 이다.

**11.** 지면으로부터 20 m 높이의 옥상에서 초속 20 m 로 쏘아 올린 물체의 $t$ 초 후의 높이를 $h$ m 라 할 때, 관계식 $h = 20t - t^2 + 20$ 이 성립한다. 높이가 가장 높을 때는 던진 후 몇 초 후인가?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$$h = 20t - t^2 + 20$$
$$= -(t^2 - 20t) + 20$$
$$= -(t - 10)^2 + 120$$

따라서 $t = 10$ 일 때 최댓값 120 를 가진다.

**12.** $x^3+ax+1=0$ 의 세 근을 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ 라 할 때, $\dfrac{\beta+\gamma}{\alpha^2},\ \dfrac{\gamma+\alpha}{\beta^2},\ \dfrac{\alpha+\beta}{\gamma^2}$ 를 세 근으로 하는 삼차방정식은?

① $x^3-ax^2-1=0$　　② $x^3-ax^2+1=0$

③ $x^3+ax^2-1=0$　　④ $x^3+ax^2+1=0$

⑤ $x^3+ax-1=0$

해설

$x^3+ax+1=0$ 의 세 근이 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ 이므로
근과 계수와의 관계에 의해서
$\alpha+\beta+\gamma=0,$
$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=a$ , $\alpha\beta\gamma=-1$

$$\therefore\ \frac{\beta+\gamma}{\alpha^2}=-\frac{\alpha}{\alpha^2}=-\frac{1}{\alpha}$$

같은 방법으로 $\dfrac{\gamma+\alpha}{\beta^2}=-\dfrac{\beta}{\beta^2}=-\dfrac{1}{\beta}$ ,

$$\frac{\alpha+\beta}{\gamma^2}=-\frac{\gamma}{\gamma^2}=-\frac{1}{\gamma}$$

$$\left(-\frac{1}{\alpha}\right)+\left(-\frac{1}{\beta}\right)+\left(-\frac{1}{\gamma}\right)$$

$$=-\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}=a$$

$$\left(-\frac{1}{\alpha}\right)\left(-\frac{1}{\beta}\right)+\left(-\frac{1}{\beta}\right)\left(-\frac{1}{\gamma}\right)+\left(-\frac{1}{\gamma}\right)\left(-\frac{1}{\alpha}\right)$$

$$=\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\gamma\alpha}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}=0$$

$$\left(-\frac{1}{\alpha}\right)\left(-\frac{1}{\beta}\right)\left(-\frac{1}{\gamma}\right)=-\frac{1}{\alpha\beta\gamma}=1$$

따라서, 구하는 삼차방정식은
$x^3-ax^2-1=0$ 이다.

**13.** 실수 $a$가 $0 < a < 2$이고, $x, y$가 연립방정식

$$\begin{cases} 4x - ay = 16 \\ ax - y \ = a^3 \end{cases}$$ 을 만족시킬 때,

$\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}$의 값을 구하면?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$$\begin{cases} 4x - ay = 16 & \cdots ㉠ \\ ax - y \ = a^3 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉡에서 $y = ax - a^3 \quad \cdots$ ㉢

㉢식을 ㉠식에 대입하면 $4x - a(ax - a^3) = 16$

$(4 - a^2)x = 16 - a^4$

$\therefore\ x = 4 + a^2 \ (\because\ a \neq \pm 2)$

$\therefore\ y = a(4 + a^2) - a^3 = 4a$

$$\begin{aligned} \therefore\ \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} &= \sqrt{(a+2)^2} + \sqrt{(a-2)^2} \\ &= a + 2 - (a - 2) \\ &\quad (\because\ 0 < a < 2) \\ &= 4 \end{aligned}$$

**14.** 어떤 문자도 0 은 아니고, $xy = a,\ xz = b,\ yz = c$ 라고 할 때, $x^2+y^2+z^2$ 은?

① $\dfrac{ab+ac+bc}{abc}$ ② $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{abc}$

③ $\dfrac{(a+b+c)^2}{abc}$ ④ $\dfrac{(ab+ac+bc)^2}{abc}$

⑤ $\dfrac{(ab)^2+(ac)^2+(bc)^2}{abc}$

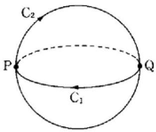
해설

$$abc = x^2y^2z^2 = x^2c^2,\ x^2 = \frac{ab}{c}$$

마찬가지로, $y^2 = \dfrac{ac}{b}$ , $z^2 = \dfrac{bc}{a}$

$$\begin{aligned} \therefore\ \ x^2+y^2+z^2 &= \frac{ab}{c}+\frac{ac}{b}+\frac{bc}{a} \\ &= \frac{(ab)^2+(ac)^2+(bc)^2}{abc} \end{aligned}$$

**15.** 다음 그림과 같이 $\overline{PQ}$를 지름으로 하는 구가 있다. 두 마리의 개미가 50(cm/분), 70(cm/분)의 속력으로 각각 $C_1$, $C_2$의 방향으로 구면의 길을 따라 계속 움직인다. P지점에서 동시에 출발하여 10분 후에 처음으로 Q지점에서 만났을 때, 이 구의 반지름은? (단, $C_1$, $C_2$는 이 구의 대원이다.)




① $\dfrac{50}{\pi}$ cm
② $\dfrac{70}{\pi}$ cm
③ $\dfrac{90}{\pi}$ cm
④ $\dfrac{100}{\pi}$ cm
⑤ $\dfrac{120}{\pi}$ cm

해설

구의 반지름을 $r$이라 하면,
10분 동안 개미가 움직인 거리는
$50 \times 10 = (2m+1)\pi r \cdots\cdots$ ㉠,
$70 \times 10 = (2n+1)\pi r \cdots\cdots$ ㉡
($\because$ $m$, $n$은 자연수)
㉠, ㉡에 대하여 정리하면
$5n - 7m = 1 \cdots\cdots$ ㉢
㉢을 만족하는 최소의 자연수는
$m = 2$, $n = 3$일 때이다.
$\therefore$ $m = 2$를 ㉠에 대입하면
$500 = 5\pi r$
$\therefore$ $r = \dfrac{100}{\pi}$ cm