1. 임의의 실수 x, y에 대하여, $(x+y)a^2+(x-y)b=4x+y$가 성립할 때, a^2+b^2의 값은?

① $\frac{13}{4}$ ② $\frac{15}{4}$ ③ $\frac{17}{4}$ ④ $\frac{19}{4}$ ⑤ $\frac{21}{4}$

해설

$(a^2+b)x+(a^2-b)y=4x+y$

$a^2+b=4\cdots$①, $a^2-b=1\cdots$②

①, ②에서 $a^2=\frac{5}{2}$, $b=\frac{3}{2}$

$\therefore\ a^2+b^2=\frac{19}{4}$

2. $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-1}{3}$을 만족하는 모든 실수 x, y에 대하여 항상 $ax+by+5=0$이다. 이때 $a+b$의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-1}{3}=t$라 하면

$x=2t-1,\ y=3t+1$

이것을 $ax+by+5=0$에 대입하면

$a(2t-1)+b(3t+1)+5=0$

$(2a+3b)t+(-a+b+5)=0$

이 식이 모든 실수 t에 대하여 성립해야 하므로

$2a+3b=0\cdots①$

$-a+b+5=0\cdots②$

①, ②를 연립하여 풀면

$a=3,\ b=-2\quad\therefore\ a+b=3+(-2)=1$

해설

$\dfrac{A}{B}=\dfrac{C}{D}\Leftrightarrow AD=BC$ 성질 이용

$3x+3=2y-2$

$3x-2y+5=0$은 $ax+by+5=0$

$\therefore a=3,\ b=-2$

3. $(a+b)(a^2-ab+b^2)(a^3-b^3)$ 의 전개식으로 옳은 것은?

① a^3+b^3 ② a^6+b^6 ③ a^6-b^6

④ a^9+b^9 ⑤ a^9-b^9

해설

(준 식)$=(a^3+b^3)(a^3-b^3)=a^6-b^6$

4. $(a+b-c)(a-b+c)$를 전개하면?

① $a^2+b^2-c^2-2bc$
② $a^2-b^2+c^2-2bc$
③ $a^2+b^2-c^2+2ab$
④ $a^2-b^2-c^2+2bc$
⑤ $a^2-b^2-c^2-2ab$

해설

$$\begin{aligned}&(a+b-c)(a-b+c)\\&=\{a+(b-c)\}\{a-(b-c)\}\\&=a^2-(b-c)^2\\&=a^2-b^2-c^2+2bc\end{aligned}$$

5. 1000^{10}을 1001로 나눌 때 몫과 나머지를 각각 $Q(x)$, R라 할 때, 다음 중 나머지 R를 구하기 위한 가장 적절한 식은?

① $x^{10} = xQ(x) + R$

② $x^{10} = (x-1)Q(x) + R$

③ $x^{10} = (x+1)Q(x) + R$

④ $x^{10} = (x-1)^{10}Q(x) + R$

⑤ $x^{10} = (x+1)Q(x) + R + 1$

해설

$1000^{10} = 1001 \cdot Q(x) + R$에서 $1000 = x$라 하면
$x^{10} = (x+1)Q(x) + R$
$x = -1$을 대입하면 $R = 1$을 구할 수 있다.

6. 다항식 $f(x)$를 $\left(x-\frac{2}{3}\right)$로 나눌때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R이라고 할 때, 다음 중 $f(x)$를 $3x-2$로 나누었을 때의 몫과 나머지는?

① $Q(x)$, R ② $3Q(x)$, R ③ $Q(x)$, $3R$
④ $\frac{1}{3}Q(x)$, R ⑤ $Q(x)$, $\frac{1}{3}R$

해설

$$f(x)=\left(x-\frac{2}{3}\right)Q(x)+R$$
$$=3\left(x-\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{1}{3}Q(x)+R$$
$$=(3x-2)\frac{1}{3}Q(x)+R$$

이므로 구하는 몫과 나머지는

몫 : $\frac{1}{3}Q(x)$ 나머지 : R

7. 이차함수 $y = x^2 + (k-3)x + k$ 의 그래프가 x 축과 만나지 않을 때, 실수 k 의 값의 범위는?

① $-1 < k < 7$ ② $-1 < k < 8$ ③ $0 < k < 9$

④ $1 < k < 9$ ⑤ $1 < k < 10$

해설

주어진 이차함수의 그래프가
x 축과 만나지 않으려면
이차방정식 $x^2 + (k-3)x + k = 0$ 이
실근을 갖지 않아야 하므로
$D = (k-3)^2 - 4k < 0$
$k^2 - 10k + 9 < 0$, $(k-1)(k-9) < 0$
$\therefore\ 1 < k < 9$

8. 이차함수 $y = x^2 - kx + 3k + 2$의 그래프에 의하여 잘려지는 x축의 길이가 3일 때, 모든 실수 k의 값의 합은?

① 6　② 8　③ 10　④ 12　⑤ 14

해설

이차함수 $y = x^2 - kx + 3x + 2$ 의 그래프와 x 축과의 교점의 좌표를 $(\alpha,\ 0)$, $(\beta,\ 0)$ 이라 하면

α, β 는 이차방정식 $x^2 - kx + 3k + 2 = 0$ 이 두 근이다.

근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha + \beta = k,\ \alpha\beta = 3k + 2$

잘려지는 x 축의 길이가 3이므로 $|\alpha - \beta| = 3$

이 때, $|\alpha - \beta|^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$ 이므로 $9 = k^2 - 4(3k + 2)$

$k^2 - 12k - 17 = 0$

따라서 근과 계수의 관계에 의하여 모든 k의 값의 합은 12이다.

9. $f(x) = x^{2008} - 1$라 할 때, $f\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right) + f\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)$의 값은?

① -4 ② -2 ③ 0

④ $-2-i$ ⑤ $-2+2i$

해설

$\dfrac{1+i}{1-i} = i,\ \dfrac{1-i}{1+i} = -i$

$f\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right) + f\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right) = f(i) + f(-i)$

$= i^{2008} - 1 + (-i)^{2008} - 1$

$= i^{4\times502} + (i)^{4\times502} - 2$

$= 1 + 1 - 2 = 0$

10. $a = (1+i)^n$ 을 양의 실수가 되게 하는 최소의 자연수 n 의 값과 그 때의 a 의 값의 합을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 24

해설

$(1+i)^n = \{(1+i)^2\}^{\frac{n}{2}} = (2i)^{\frac{n}{2}} = 2^{\frac{n}{2}} \cdot i^{\frac{n}{2}}$

$i^{\frac{n}{2}}$ 이 양의 실수가 되는 최소의 n의 값은 $i^4 = 1$ 이므로 $\frac{n}{2} = 4$

$\therefore \ n = 8$

$\therefore \ a = (2i)^4 = 16$

$\therefore \ n = 8, \ a = 16$

$\therefore \ n + a = 24$