

1. 18 에 적당한 자연수를 곱하여 어떤 자연수의 제곱이 되게 하려고 한다. 이때 곱해야 할 자연수를 가장 작은 것부터 3 개를 써라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

▷ 정답 : 8

▷ 정답 : 18

해설

$18 = 2 \times 3^2$
곱해야 할 자연수를 x 라 할 때,
 $(2 \times 3^2) \times x = y^2$
 $x = 2, 2 \times 2^2, 2 \times 3^2, \dots$
 $= 2, 8, 18, \dots$

2. 120 에 자연수 x 를 곱하여 어떤 자연수의 제곱이 되게 하려고 한다. 다음 중 x 의 값이 될 수 없는 것은?

① $2 \times 3 \times 5$

② $2^3 \times 3 \times 5$

③ $2 \times 3^3 \times 5$

④ $2 \times 3 \times 5 \times 7^2$

⑤ $2^2 \times 3 \times 5$

해설

$120 = 2^3 \times 3 \times 5$ 로 소인수분해되므로 소인수 2, 3, 5의 지수가 홀수인 수를 곱한다.

$2^2 \times 3 \times 5$ 은 2² 을 곱하였으므로 제곱수가 될 수 없다.

3. 자연수 $A = 2^2 \times 3^n$ 의 약수의 개수가 24 일 때, n 의 값을 구하면?

① 2

② 5

③ 7

④ 8

⑤ 12

해설

$$(2+1)(n+1) = 24$$

$$n+1 = 8$$

$$\therefore n = 7$$

4. $2^2 \times \square$ 는 약수의 개수가 12 개인 자연수이다. 다음 중 $\square$ 안에 알맞은 수 중 가장 작은 자연수는?

① 4

② 8

③ 15

④ 30

⑤ 32

해설

$12 = (2+1) \times (1+1) \times (1+1)$ 이므로

$\square = a \times b$ (a, b 는 소수),

$a \neq 2, b \neq 2$ 이므로 가장 작은 소수는 3×5 ,

$\therefore \square = 15$

5. $3^4 \times x$ 는 약수의 개수가 10 개 인 자연수이다. 다음 중 x 의 값으로 알맞지 않은 것은?

① 2 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 3^5

해설

약수의 개수는 $3^4 \times x$ 에서

$(4+1) \times (\square+1) = 5 \times 2 = 10$ 또는 $(9+1) = 10$ 이 될 수 있다.
즉 x 가 될 수 있는 수는 3 과 서로소이고 지수가 1 인 수 또는 3^5 이다.

그러므로 알맞지 않은 것은 3 이다.

6. 1 부터 50 까지의 자연수 중에서 약수의 개수가 3 개인 자연수의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 4 개

▷ 정답 : 4 개

해설

자연수 n 의 약수의 개수가 3 개이기 위해서는
1 과 n 이외에 약수가 한 개만 더 있어야하므로
자연수 n 은 소수의 완전제곱수이어야 한다.
따라서 1 부터 50 까지의 완전제곱수를 구하면
 $7^2 = 49 < 50$ 이고 $11^2 = 121 > 50$ 이므로
50 이하인 소수의 완전제곱수는
 $2^2, 3^2, 5^2, 7^2$ 이다.

7. 40 에 자연수를 곱하여 어떤 수의 제곱이 되도록 하려고 한다. 제곱이 되도록 하기 위해서 곱하는 수를 작은 순으로 4 개를 구하여라.
- ▶ 답 :
- ▶ 답 :
- ▶ 답 :
- ▶ 답 :
- ▷ 정답 : 10
- ▷ 정답 : 40
- ▷ 정답 : 90
- ▷ 정답 : 160

해설

$$40 = 2^3 \times 5$$
$$40 \times n = 2^3 \times 5 \times n = x^2 \text{ 에서}$$
$$n = 2 \times 5 \times k^2 \text{ 꼴이므로}$$
$$n \text{ 을 작은 순으로 4 개 써 보면}$$
$$n = 2 \times 5 \times 1^2 = 10$$
$$n = 2 \times 5 \times 2^2 = 40$$
$$n = 2 \times 5 \times 3^2 = 90$$
$$n = 2 \times 5 \times 4^2 = 160$$
$$\therefore 10, 40, 90, 160$$

8. $\frac{360}{n}$ 이 어떤 자연수의 제곱이 되게 하는 자연수 n 은 모두 몇 개인가?
- ① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$,
 $\frac{360}{n}$ 이 어떤 자연수의 제곱이 되기 위해서
 $n = 2 \times 5$, $n = 2 \times 3^2 \times 5$, $2^3 \times 5$, $2^3 \times 3^2 \times 5$ 의 4 개이다.

9. 자연수 135 의 약수의 개수와 $3 \times 5^n \times a^m$ 의 약수의 개수가 같을 때, $n + m$ 의 값은? (단, m, n 은 자연수이고, $a \neq 3, 5$ 인 소수)

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$135 = 3^3 \times 5$
(약수의 개수) $= 4 \times 2 = 8$ (개)
 $(1 + 1) \times (n + 1) \times (m + 1) = 8$, $n = 1, m = 1$
그러므로 $n + m = 1 + 1 = 2$

10. 소인수가 2개인 어떤 자연수가 있다. 이 자연수를 소인수분해한 결과 $\square \times 5^4$ 이고, 약수의 개수가 20개 일 때, 가장 작은 자연수이다.

$\square$ 안에 들어갈 가장 작은 자연수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$\square \times 5^4$ 에서 $\square = a^x$ 이라 하면 약수의 개수는 $(x+1) \times (4+1) = 20$ (개) 이므로

$$(x+1) \times (4+1) = (x+1) \times 5 = 20$$

$$x+1 = 4 \quad \therefore x = 3$$

a 가 될 수 있는 가장 작은 소인수는 2 이므로

$$\square = 2^3 = 8$$

11. 1 부터 200 까지의 자연수 중에서 약수의 개수가 3 개인 자연수는 모두 몇 개인가?

① 5 개 ② 6 개 ③ 7 개 ④ 8 개 ⑤ 9 개

해설

자연수 n 의 약수의 개수가 3 개이기 위해서는
1 과 n 이외에 약수가 한 개만 더 있어야하므로
자연수 n 은 소수의 완전제곱수이어야 한다.
따라서 1 부터 200 까지의 완전제곱수를 구하면
 $13^2 = 169 < 200$ 이고 $17^2 = 289 > 200$ 이므로
200 이하인 소수의 완전제곱수는
 $2^2, 3^2, 5^2, 7^2, 11^2, 13^2$ 이다.

12. 504의 약수의 개수와 $3^x \times 7^2 \times 13^y$ 의 약수의 개수가 같다고 한다. 이때, $x - y$ 의 값을 구하여라. (단, x, y 는 $x > y$ 인 자연수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$504 = 2^3 \times 3^2 \times 7$ 이므로 약수의 개수가 같기 위해서는 $x = 3$, $y = 1$ 이어야 한다. ($\because x > y$)
 $\therefore x - y = 3 - 1 = 2$

13. $5^4 \times \square$ 의 약수의 개수가 15 개일 때, $\square$ 안에 들어갈 수 있는 가장 작은 자연수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$\square = a^x$ (a 는소수) 라고 하면 $5^4 \times a^x$ 의 약수의 개수는 15 개이므로

$(4 + 1) \times (x + 1) = 15$, $x + 1 = 3$, $x = 2$ 이다.

또한 가장 작은 자연수가 되기 위해서는 $a = 2$ 이다.

따라서 $\square = a^x = 2^2 = 2 \times 2 = 4$ 이다.

14. 서로 다른 한 자리 소수 a, b, c 에 대하여 $a^l \times b^m \times c^n$ 으로 소인수분해되는 자연수 N 에 3 을 곱하였더니 약수의 개수가 2 배가 되었다. 이때, $a + b + c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

a, b, c 중 3이 있는 경우
 $a = 3$ 이라 하면
 $2(l+1)(m+1)(n+1) = (l+2)(m+1)(n+1)$
 $2l+2 = l+2, l = 0$
 l, m, n 은 1 이상인 자연수이므로 a, b, c 중에 3은 없다.
 a, b, c 는 한 자리 소수 2, 3, 5, 7 중에서 3이 아니므로 2, 5, 7 이다.
 $\therefore 2 + 5 + 7 = 14$

15. 1 부터 50 사이의 수 중에서 약수의 개수가 3 개인 수는 모두 몇 개인지 구하여라.

▶ 답 : 4 개

▷ 정답 : 4 개

해설

약수의 개수가 3 개인 수는 (소수)² 이므로
50 이하의 수 중 소수의 제곱이 되는 수는 2², 3², 5², 7² 의 4 개