1. $(1+i)x^2+2(1+2i)x-3+3i$ 가 순허수일 때, x 의 값은?

① 0　② 1　③ -3　④ 1, 3　⑤ -1

해설

$(1+i)x^2+2(1+2i)x-3+3i$
$=x^2+x^2i+2x+4xi-3+3i$
$=(x^2+2x-3)+(x^2+4x+3)i$
순허수를 만족하려면 실수부$=0$, 허수부$\neq 0$이어야 한다.
$x^2+2x-3=0$이면서, $x^2+4x+3\neq 0$인 x값을 찾아야 한다.
$\therefore x=1$

2. $\frac{a}{1-i}+\frac{b}{1+i}=5$ 를 만족하는 두 실수 $a,\ b$ 에 대하여 곱 ab 의 값을 구하면?

① 5 ② 10 ③ 15 ④ 20 ⑤ 25

해설

$\frac{a(1+i)}{2}+\frac{b(1-i)}{2}=5$

$a(1+i)+b(1-i)=10,$

$(a+b)+(a-b)i=10$

$a+b=10,\ a-b=0$

$2a=10,\ a=5,\ b=5,\ ab=25$

3. $(1-3i)x+(3+2i)y=1+8i$를 만족하는 실수 $x,\ y$ 에 대하여 $x+y$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$(1-3i)x+(3+2i)y=1+8i$,
$(x+3y)+(-3x+2y)i=1+8i$ 에서
복소수의 상등에 의하여
$x+3y=1,\ -3x+2y=8$ 이고
연립하여 풀면 $y=1,\ x=-2$
$\therefore\ x+y=-1$

4. $j^2 = -\sqrt{-1}$ 라 할 때, j^{2012} 의 값은?

① 1 ② -1
③ $\sqrt{-1}$ ④ $-\sqrt{-1}$
⑤ 두 개의 값을 갖는다.

해설
$j^4 = (-\sqrt{-1})^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$
$\therefore\ j^{2012} = (j^4)^{503} = (-1)^{503} = -1$

5. $z=\dfrac{2}{1-i}$ 일 때, $2z^2-4z-1$ 의 값을 구하면?

① -1 ② 2 ③ -3 ④ 4 ⑤ -5

해설

$z=\dfrac{2}{1-i}=1+i$

$$\begin{aligned}\therefore\ 2z^2-4z-1 &= 2(1+i)^2-4(1+i)-1\\ &= 4i-4-4i-1\\ &= \ -5\end{aligned}$$

해설

$z=1+i, z-1=i$

양변을 제곱하고 정리하면

$z^2-2z=-2$

$2z^2-4z-1$

$=2(z^2-2)z-1$

$=-4-1=-5$

6. $z_1 = 1 - i, z_2 = 1 + i$ 일 때, $z_1^3 + z_2^3$ 의 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① $4 - 2i$ ② 0 ③ 20

④ $-2 + 4i$ ⑤ -4

해설

$z_1 + z_2 = 2,\ z_1 z_2 = 2$

$z_1^3 + z_2^3 = (z_1 + z_2)^3 - 3z_1 z_2 (z_1 + z_2)$

$= 8 - 12$

$= -4$

7. 등식 $(1+i)z+(2z-3i)i=0$ 을 만족하는 복소수 z 는?

① $3+9i$ ② $-3+9i$ ③ $3-9i$
④ $\frac{3}{10}-\frac{9}{10}i$ ⑤ $-\frac{3}{10}+\frac{9}{10}i$

해설
$z=a+bi$ ($a,\ b$ 는 실수) 로 놓으면
$(1+i)(a+bi)+\{2(a+bi)-3i\}i=0$
$(a+bi+ai-b)+(2ai-2b+3)=0$
$(a-3b+3)+(3a+b)i=0$
복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$a-3b+3=0$, $3a+b=0$
두 식을 연립하여 풀면
$a=-\frac{3}{10}$, $b=\frac{9}{10}$
$\therefore\ z=-\frac{3}{10}+\frac{9}{10}i$

8. $\left(\frac{\sqrt{2}}{1-i}\right)^{2n} = -1$ 을 만족하는 자연수 n 의 값이 <u>아닌</u> 것은? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① 2　　② 6　　③ 8　　④ 10　　⑤ 14

해설

$\left(\frac{\sqrt{2}}{1-i}\right)^{2n} = \left(\frac{2}{-2i}\right)^{n} = i^{n}$

$i^{n} = -1$ 이 성립하려면 $n = 4m + 2$ ($m \geq 0$)

③ : $8 = 4 \times 2 + 0$

9. $x = -2 - i$ 일 때, $x^2 + 4x + 10$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$x = -2 - i$ 에서 $x + 2 = -i$ 의 양변을 제곱하면

$(x + 2)^2 = (-i)^2$ 이므로

$x^2 + 4x = -5$

$\therefore\ x^2 + 4x + 10 = -5 + 10 = 5$

10. 다음 <보기>에서 계산 중 잘못된 것을 모두 고르면? (단, $i = \sqrt{-1}$)

보기

Ⅰ. $\sqrt{-3}\sqrt{-3} = \sqrt{(-3)\cdot(-3)} = \sqrt{9} = 3$
Ⅱ. $\sqrt{5}\sqrt{-2} = \sqrt{5\times(-2)} = \sqrt{-10} = \sqrt{10}i$
Ⅲ. $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{-6}} = \sqrt{\dfrac{2}{-6}} = \sqrt{-\dfrac{1}{3}} = \sqrt{\dfrac{1}{3}}i$
Ⅳ. $\dfrac{\sqrt{-10}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\dfrac{-10}{2}} = \sqrt{-5} = \sqrt{5}i$

① Ⅰ, Ⅱ　　② Ⅰ, Ⅲ　　③ Ⅱ, Ⅲ, Ⅳ
④ Ⅱ, Ⅳ　　⑤ Ⅲ, Ⅳ

해설

Ⅰ. $\sqrt{-3}\sqrt{-3} = \sqrt{3}i\sqrt{3}i = \sqrt{9}i^2 = -3$
∴ 옳지 않다.
Ⅱ. $\sqrt{5}\sqrt{-2} = \sqrt{5}\sqrt{2}i = \sqrt{10}i$
∴ 옳다.
Ⅲ. $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{-6}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}i} = \sqrt{\dfrac{2}{6}}\cdot\dfrac{i}{i^2} = -\sqrt{\dfrac{1}{3}}i$
∴ 옳지 않다.
Ⅳ. $\dfrac{\sqrt{-10}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{10}i}{\sqrt{2}} = \sqrt{\dfrac{10}{2}}i = \sqrt{5}i$
∴ 옳다.

11. $\sqrt{-12}+\sqrt{-3}\sqrt{-6}-\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{-2}}=a+bi$일 때, a^2+b^2의 값은? (단, a, b는 실수, $i=\sqrt{-1}$)

① 15 ② 25 ③ 35 ④ 45 ⑤ 55

해설

$\sqrt{-12}+\sqrt{-3}\sqrt{-6}-\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{-2}}$

$=2\sqrt{3}i-3\sqrt{2}+\sqrt{3}i$

$=-3\sqrt{2}+3\sqrt{3}i$

$=a+bi$

따라서, $a=-3\sqrt{2}, b=3\sqrt{3}$

$\therefore\ a^2+b^2=18+27=45$

12. 임의의 두 실수 x, y에 대하여 $(x+yi)(1+2i)+(xi-y)(-1-i)-(y+i)$가 실수일 때, 좌표평면에서 점 (x, y)로 표현되는 도형과 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하면?

① 2　② 1　③ $\frac{1}{2}$　④ $\frac{1}{4}$　⑤ $\frac{1}{6}$

해설

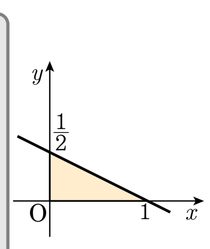
(준식) $=(2x-2y)+(x+2y-1)i=0$

$\therefore x+2y-1=0,$

$y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

$S=\frac{1}{2}\times 1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

$\therefore$ 넓이 $=\frac{1}{4}$



13. 복소수 $z = x + yi$를 좌표평면 위에 점 $p(x,\ y)$에 대응시킬 때, $(3-4i)z$가 실수가 되게 하는 점 p의 자취가 나타내는 도형은?

① 기울기가 양인 직선　② 기울기가 음인 직선

③ 위로 볼록한 포물선　④ 아래로 볼록한 포물선

⑤ 원

해설

$$\begin{aligned}(3-4i)\,z &= (3-4i)(x+yi)\\ &= (3x+4y)+(-4x+3y)\,i\end{aligned}$$

실수가 되려면 허수부 $-4x+3y=0$이다.

$\therefore y = \frac{4}{3}x$ ($\Rightarrow$ 기울기가 양인 직선)

14. $a^2(1+i)+a(2+i)-8-6i$가 순허수가 되도록 실수 a의 값을 구하면?

① -10　② -8　③ -6　④ -4　⑤ -2

해설

$a^2(1+i)+a(2+i)-8-6i$
$=(a^2+2a-8)+i(a^2+a-6)$
$=(a+4)(a-2)+i(a+3)(a-2)$
만약에 $a=2$가 되면 실수가 된다.
$a \neq 2$, $\therefore\ a=-4$

15. 복소수 $(1+2i)x-(2+i)y+i$를 제곱하였더니 -9가 되었다. 이 때, $x+y$의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$ 이고 $x,\ y$는 실수이다.)

① 2 또는 -4　② 2 또는 -3　③ -1 또는 3
④ -1 또는 -3　⑤ -1 또는 -2

해설

$z=(x-2y)+(2x-y+1)i$
$z^2=-9$
즉, z는 순허수이다.
$\therefore x-2y=0,\ (2x-y+1)^2=9$
$x=2y$ 와 $2x-y+1=\pm3$을 연립하여 풀면
$y=\frac{2}{3}\rightarrow x=\frac{4}{3}$
$y=-\frac{4}{3}\rightarrow x=-\frac{8}{3}$
$\therefore x+y=2$ 또는 -4 이다.

16. 복소수 $(1-xi)(1-i)$가 순허수가 되도록 실수 x의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $x=1$

해설

$(1-xi)(1-i)=(1-x)+(-1-x)i$
순허수이려면 실수부가 $0 \Rightarrow 1-x=0$,
$x=1$

17. 복소수 $z=(1+i)x^2+(5+2i)x+3(2-i)$ 에서 z가 순허수일 때, 실수 x의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

해설

$z=(x^2+5x+6)+(x^2+2x-3)i$

$\quad=(x+2)(x+3)+(x-1)(x+3)i$

순허수가 되려면 실수부$=0$, 허수부$\neq 0$

$\therefore\ x=-2$

18. 복소수 $(1+i)x^2-(2+i)x-3-2i$를 제곱하면 음의 실수가 된다고 할 때, 실수 x의 값은?

① -1 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

(준식)$=x^2-2x-3+(x^2-x-2)i$
이것을 제곱해서 음의 실수가 되려면 순허수이어야 하므로
$x^2-2x-3=0\cdots$㉠, $x^2-x-2\neq 0\cdots$㉡
㉠에서 $x=3,\ x=-1$
이 중에서 ㉡를 만족하는 것은 $\therefore\ x=3$

19. 복소수 $(1+i)x^2+2(2+i)x+3-3i$를 제곱하면 음의 실수가 된다. 이 때, 실수 x의 값은?
(단, $i^2=-1$)

① -1　② 1　③ -3　④ 3　⑤ 7

해설

$(x^2+4x+3)+(x^2+2x-3)i$가 순허수이어야 하므로
$x^2+4x+3=0,\ x^2+2x-3\neq 0$
$(x+3)(x+1)=0,\ x=-1,\ x=-3$
$(x+3)(x-1)\neq 0,\ x\neq 1,\ x\neq -3$
$\therefore\ x=-1$

20. 실수 k 에 대하여 복소수 $z = 3(k+i) - k(1-i)^2$ 의 값이 순허수가 될 때, $z \cdot \bar{z}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$z = 3(k+i) - k(1-i)^2$ 를 정리하면
$z = 3k + 3i + 2ki = 3k + (3+2k)i$
이것이 순허수이려면 $3k = 0,\ 3 + 2k \neq 0$
$k = 0$ 이므로 $z = 3i,\ \bar{z} = -3i$
$\therefore z \cdot \bar{z} = 3i \cdot -3i = 9$

21. $\sqrt{(y-x)^2}+(y-1)i=-2x-3i$ 를 만족하는 실수 $x,\ y$ 에 대하여 $\frac{x}{y}$ 의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{1}{6}$

해설

$|y-x|+(y-1)i=-2x-3i$

$|y-x|=-2x$

$y-1=-3 \quad \therefore\ y=-2$

(i) $y \geq x$ 일 때

$y-x=-2x,\ y=-x,\ x=2$ (모순)

(ii) $y < x$ 일 때

$x-y=-2x,\ y=3x$

$\therefore\ x=-\frac{2}{3}$ (성립)

$\therefore\ \frac{x}{y}=\frac{x}{3x}=\frac{1}{3}$

22. $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=\frac{x+i}{x-i}$ 를 만족하는 실수 x의 값은 ?

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ 2 ⑤ -5

해설

$(1+\sqrt{3}i)(x-i)=2(x+i)$

$(x+\sqrt{3})+(\sqrt{3}x-1)i=2x+2i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$x+\sqrt{3}=2x,\ \ \sqrt{3}x-1=2$

$\therefore\ x=\sqrt{3}$

23. 복소수 $z = 1+4i$일 때, $\overline{x(2-i)}+y(1-i) = \bar{z}$가 성립하도록 하는 실수 x, y에 대하여 $x+y$의 값은? (단, $\bar{z}$는 복소수 z의 켤레복소수이고, $i = \sqrt{-1}$)

① 0 ② 2 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$z = 1+4i$이므로 $\bar{z} = 1-4i$이다.
주어진 등식의 좌변을 정리하면

$$\begin{aligned}\overline{x(2-i)}+y(1-i) &= \bar{x}\,\overline{(2-i)}+y(1-i)\\ &= x(2+i)+y(1-i)\end{aligned}$$

$\therefore\ x(2+i)+y(1-i) = 1-4i$
$(2x+y)+(x-y)i = 1-4i$
복소수가 서로 같을 조건에서
$2x+y=1,\ x-y=-4$
위 두 식을 연립하여 풀면 $x=-1,\ y=3$
$\therefore\ x+y=2$

24. $4-3i+\frac{3-5i}{1+i}+4i+\frac{-3+5i}{1+i}-\frac{2}{1-i}$ 를 간단히 한 것은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① $-i$　　② 3　　③ $4i$

④ 5　　⑤ $1+3i$

해설

$$4-3i+\frac{3-5i}{1+i}+4i+\frac{-3+5i}{1+i}-\frac{2}{1-i}$$
$$=4-3i+4i+\frac{3-5i-3+5i}{1+i}-\frac{2}{1-i}$$
$$=4+i-\frac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)}$$
$$=4+i-\frac{2(1+i)}{1+1}=4+i-1-i=3$$

25. 복소수 z의 켤레복소수가 $\bar{z}$일 때, 등식 $(1-i)\bar{z}+2iz=3-i$를 만족시키는 z를 구하면?

① $3-2i$　　② $-3+i$　　③ $3+i$
④ $-3-2i$　　⑤ $3-i$

해설

복소수 $z=x+yi(x,\ y$ 는 실수$)$라 놓으면
$\bar{z}=x-yi$
따라서, 주어진 식은
$(1-i)(x-yi)+2i(x+yi)=3-i$
$x-yi-xi-y+2xi-2y=3-i$
$(x-3y)+(x-y)i=3-i$
복소수의 상등에 의하여 $x-3y=3$, $x-y=-1$
$\therefore\ x=-3,\ y=-2$
$\therefore\ z=-3-2i$

26. 유리수 $a,\ b,\ c,\ d$에 대하여 $(\sqrt{2}+i)^4+a(\sqrt{2}+i)^3+b(\sqrt{2}+i)^2+c(\sqrt{2}+i)+d=0$을 만족한다. 이 때, $a-b-c-d$의 값은? (단, $i^2=-1$)

① -7　　② 3　　③ 1　　④ -1

해설

$(\sqrt{2}+i)^4=-7+4\sqrt{2}i$, $(\sqrt{2}+i)^3=-\sqrt{2}+5i$,
$(\sqrt{2}+i)^2=1+2\sqrt{2}i$
$(-7+4\sqrt{2}i)+a(-\sqrt{2}+5i)$
$+b(1+2\sqrt{2}i)+c(\sqrt{2}+i)+d=0$
$(-7-\sqrt{2}a+b+\sqrt{2}c+d)$
$+(4\sqrt{2}+5a+2\sqrt{2}b+c)i=0$
$\therefore\ (-7+b+d)+(c-a)\sqrt{2}=0,$
$(5a+c)+(4+2b)\sqrt{2}=0$
$a,\ b,\ c,\ d$ 는 유리수이므로 $-7+b+d=0$:
$c-a=0,\ 5a+c=0,\ 4+2b=0$
$\therefore\ a=0,\ b=-2,\ c=0,\ d=9$
$\therefore\ a-b-c-d=-7$

27. n이 짝수일 때, $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{4n+1}+\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{4n+1}$의 값은?

① -2 ② $-\sqrt{2}$ ③ 0 ④ 2 ⑤ $\sqrt{2}$

해설

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{4n+1}+\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{4n+1}$$
$$=\left\{\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}^{2n}\cdot\frac{1+i}{\sqrt{2}}+\left\{\left(\frac{1-\pi}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}^{2n}\cdot\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)$$
$$=(\pi^2)^{2n}\cdot\frac{1+i}{\sqrt{2}}+\{(-\pi)^2\}^{2n}-\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)$$
$$=\frac{1+i}{\sqrt{2}}+\frac{1-i}{\sqrt{2}}$$
$$=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

28. 정수 n에 대해 $z = i^n + i^{-n}, i = \sqrt{-1}$을 만족하는 z의 개수는?

① 1개 ② 2개 ③ 3개
④ 4개 ⑤ 4개보다 많다.

해설

정수 n 에 대하여 $i^n = i$ 또는 -1 또는 $-i$ 또는 1,
$i^n = i$ 이면 $i^{-n} = -i$, $i^n = -1$ 이면
$i^{-n} = -1$, $i^n = -i$ 이면
$i^{-n} = i$, $i^n = 1$ 이면
$i^{-n} = 1$
$\therefore\ i^n + i^{-n} = 0, -2, 0, 2$
$\therefore\ z$는 3개다.

29. 자연수 n에 대해 $x=\left(\frac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^{2n}+\left(\frac{\sqrt{2}}{1-i}\right)^{2n}$라 하자. x가 될 수 있는 모든 수의 합을 구하면?

① $2i$　② $-2i$　③ 0　④ 2　⑤ -2

해설

$x=\left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^{2}\right\}^{n}+\left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{1-i}\right)^{2}\right\}^{n}$

$=\left(\frac{2}{2i}\right)^{n}+\left(\frac{2}{-2i}\right)^{n}$

$=\left(\frac{1}{i}\right)^{n}+\left(-\frac{1}{i}\right)^{n}=(-i)^{n}+i^{n}$

i^{n} 은 $n=4k$, $n=4k+1$, $n=4k+2$, $n=4k+3$ 인 경우에 따라 각각 달라지므로 (k 는 자연수)

(i) $n=4k$ 이면 $x=1+1=2$

(ii) $n=4k+1$ 이면 $x=-i+i=0$

(iii) $n=4k+2$ 이면 $x=-1-1=-2$

(iv) $n=4k+3$ 이면 $x=i-i=0$

$\therefore\ x=2,\ 0,\ -2$

따라서, x가 될 수 있는 모든 수의 합은 0

30. 복소수 α, β 에 대한 다음 보기의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면? (단, $\overline{\alpha}$ 는 α 의 켤레복소수이다.)

> ㉠ $\alpha + \overline{\alpha}$ 는 실수이다.
>
> ㉡ $\alpha - \overline{\alpha}$ 는 허수이다.
>
> ㉢ α^2 이 실수이면 α 도 실수이다.
>
> ㉣ $\overline{\alpha + \beta} = \overline{\alpha} + \overline{\beta}$ 이고 $\overline{\alpha\beta} = \overline{\alpha} \cdot \overline{\beta}$ 이다.

① ㉠, ㉡　　② ㉠, ㉢　　③ ㉡, ㉢

④ ㉠, ㉣　　⑤ ㉡, ㉣

해설

$\alpha = a + bi,\ \beta = c + di\ (a,\ b,\ c,\ d$ 는 실수$)$라 하면

㉠ $\alpha + \overline{\alpha} = (a + bi) + (a - bi) = 2a$ (실수)

$\therefore$ 참

㉡ α 가 실수이면 $\alpha = \overline{\alpha}$ 이므로 $\alpha - \overline{\alpha} = 0$ 이다.
따라서 $\alpha - \overline{\alpha}$ 가 반드시 허수인 것은 아니다.

$\therefore$ 거짓

㉢ $i^2 = -1$ 은 실수이지만 i 는 순허수이다.

$\therefore$ 거짓

㉣
$$\begin{aligned}\overline{\alpha + \beta} &= \overline{(a + c) + (b + d)i} \\ &= (a + c) - (b + d)i \\ &= (a - bi) + (c - di) \\ &= \overline{\alpha} + \overline{\beta}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{\alpha\beta} &= \overline{(ac - bd) + (ad + bc)i} \\ &= (ac - bd) - (ad + bc)i \\ &= (a - bi)(c - di) \\ &= \overline{\alpha} \cdot \overline{\beta}\end{aligned}$$

$\therefore$ 참

31. 두 복소수 x, y 에 대하여 $x+y=2+3i$ 라 할 때, $x\overline{x}+x\overline{y}+\overline{x}y+y\overline{y}$ 의 값은?

① 13　② $11+2i$　③ 12
④ $12-i$　⑤ 11

해설

$x+y=2+3i$, $\overline{x}+\overline{y}=2-3i$
$x\overline{x}+x\overline{y}+\overline{x}y+y\overline{y}$
$=x(\overline{x}+\overline{y})+y(\overline{x}+\overline{y}))$
$=(x+y)(\overline{x}+\overline{y})$
$=(2+3i)(2-3i)$
$=13$

32. x, y 가 실수이고, 복소수 $z = x + yi$ 와 켤레복소수 $\bar{z} = x - yi$ 와의 곱이 $z \cdot \bar{z} = 1$ 일 때, $\frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right) i$ 의 값은?

① $\frac{y}{2}$ ② $-y$ ③ $2x$ ④ $\frac{-x}{2}$ ⑤ 100

해설

$z \cdot \bar{z} = 1$ 에서 $\bar{z} = \frac{1}{z}$ 이다.

그러므로 $\frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right) i = \frac{1}{2}(z - \bar{z})i$

$$= \frac{1}{2}(x + yi - x + yi)i$$

$$= \frac{1}{2}(2yi)i = -y$$

33. 복소수 $\alpha = a + bi$ ($a,\ b$ 는 실수) 에 대하여 $\alpha^* = b + ai$로 나타낸다. $\alpha = \dfrac{4+3i}{5}$ 일 때, $5\alpha^5(\alpha^*)^4$ 의 값을 구하면?

① $4+3i$ ② $3+3i$ ③ $2+3i$

④ $1+3i$ ⑤ $-1+3i$

해설

$$\begin{aligned}\alpha\alpha^* &= (a+bi)(b+ai)\\ &= ab + a^2 i + b^2 i - ab = (a^2+b^2)i\end{aligned}$$

$\alpha = \dfrac{4+3i}{5}$ 이므로 $\alpha\alpha^* = \left\{\left(\dfrac{4}{5}\right)^2 + \left(\dfrac{3}{5}\right)^2\right\} i = i$

$$\begin{aligned}\therefore\ 5\alpha^5(a^*)^4 &= 5\alpha(\alpha \cdot a^*)^4\\ &= 5 \cdot \frac{4+3i}{5} \cdot i^4\\ &= 4+3i\end{aligned}$$

34. $x+\frac{1}{x}=1$ 일 때, $x^3+5x+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3}$ 의 값을 구하면?

① $\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{3}i)$ ② $\frac{3}{2}(1 \pm \sqrt{3}i)$ ③ $\frac{5}{2}(2 \pm \sqrt{3}i)$
④ $\frac{7}{2}(3 \pm \sqrt{3}i)$ ⑤ $\frac{9}{2}(4 \pm \sqrt{3}i)$

해설

$x+\frac{1}{x}=1 \Rightarrow x^2-x+1=0 \therefore x=\frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= x^3+\frac{1}{x^3}+2\left(x+\frac{1}{x}\right)+3x \\ &= \left(x+\frac{1}{x}\right)^3-\left(x+\frac{1}{x}\right)+3x \\ &= 3x \\ &= \frac{3}{2}(1 \pm \sqrt{3}i)\end{aligned}$$

35. $a = \dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $a^5 + a^3 - 1$ 의 값을 구하면? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① $\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$　② 0　③ 1
④ $\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$　⑤ $-1+\sqrt{3}i$

해설

$a = \dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

$2a+1 = -\sqrt{3}i$ 의 양변을 제곱하면,

$4a^2 + 4a + 1 = -3 \quad \Rightarrow \quad a^2 + a + 1 = 0$

양변에 $a-1$ 를 곱하면

$(a-1)(a^2+a+1) = 0 \Leftrightarrow a^3 - 1 = 0$

$\therefore\ a^3 = 1$

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= a^3a^2 + a^3 - 1 \\ &= a^2 \\ &= -a - 1 (\because a^2 + a + 1 = 0) \\ &= \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\end{aligned}$$

36. 복소수 $z = \frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}$ 에 대하여 $(3z^2+z)^2+(z^2+3z)^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$z = \frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i} = \frac{(1+\sqrt{3}i)^2}{(1-\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i)}$$
$$= \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$$

$$z^2 = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$$

$(3z^2+z)^2+(z^2+3z)^2$

$$= \left(\frac{-3-3\sqrt{3}i-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2$$
$$+ \left(\frac{-1-\sqrt{3}i-3+3\sqrt{3}i}{2}\right)^2$$

$= (-2-\sqrt{3}i)^2+(-2+\sqrt{3}i)^2$

$= 4+4\sqrt{3}i-3+4-4\sqrt{3}i-3 = 2$

해설

$$z = \frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}$$
$$= \frac{(1+\sqrt{3}i)^2}{(1-\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i)}$$
$$= \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$$

에서 양변에 2를 곱하고 -1 을 우변으로 이항하면 $2z+1 = \sqrt{3}i$

양변을 제곱하면

$4z^2+4z+1 = -3$

$\rightarrow 4z^2+4z+4 = 0$

$\rightarrow z^2+z+1 = 0$

$\rightarrow (z-1)(z^2+z+1) = 0$

$\rightarrow z^3-1 = 0$

$\rightarrow z^3 = 1$

※방정식에 익숙한 학생들은

$z = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 에서 바로 $z^2+z+1=0$ 와 $z^3=1$ 을 도출할 수 있을 것이다.

$(3z^2+z)^2+(z^2+3z)^2$

$= 10z^4+12x^3+10z^2$

$= (10z^4+10z^3+10z^2)+2z^3$

$= 10z^2(z^2+z+1)+2z^3$

$= 0+2$

$= 2$

37. 방정식 $x^2+x+1=0$ 의 한 근을 w 라 할 때, $\frac{1}{2w^3+3w^2+4w}=aw+b$ 를 만족하는 실수 $a+b$ 의 값을 구하면?

① -1　② -2　③ 2　④ 1　⑤ $\frac{1}{3}$

해설

$x^2+x+1=0$ 의 한 근을 w (허근)라 하고, $w^2+w+1=0$ 에서 양변에 $w-1$ 을 곱하면,

$w^3-1=0$　$\therefore\ w^3=1$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2w^3+3w^2+4w} &= \frac{1}{3w^2+4w+2}\\ &= \frac{1}{3(w^2+w+1)+w-1}\\ &= \frac{1}{w-1}\\ &= \frac{w+2}{(w-1)(w+2)}\\ &= \frac{w+2}{w^2+w-2}\\ &= \frac{w+2}{-3}\\ &= -\frac{1}{3}w-\frac{2}{3}\end{aligned}$$

$\therefore\ -\frac{1}{3}w-\frac{2}{3}=aw+b$ 에서

a,b 가 실수, w 는 허수이므로

$a=-\frac{1}{3},\ b=-\frac{2}{3}$　$\therefore\ a+b=-1$

38. 복소수 $z=\dfrac{2}{1+i}$ 에 대하여 z^3-2z^2+2z+5 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$z=\dfrac{2}{1+i}=1-i$

$z^2=-2i,\ z^3=-2-2i$

$\therefore\ z^3-2z^2+2z+5$

$=(-2i-2)-2(-2i)+2(1-i)+5$

$=5$

해설

$$\begin{aligned} z=1-i \quad &\Rightarrow \quad z-1=-i \\ &\Rightarrow \quad z^2-2z+1=-1 \\ &\Rightarrow \quad z^2-2z+2=0 \end{aligned}$$

$z^3-2z^2+2z+5=z(z^2-2z+2)+5=5$

39. $x=\dfrac{1+3i}{1+i}$ 일 때, x^3-4x^2+4x+1 의 값은?

① $1+i$ ② $1-i$ ③ $-1+i$

④ $-1-i$ ⑤ 1

해설

$x=2+i$

$(x-2)^2=i^2=-1$

$\therefore x^2-4x=-5$

$$
\begin{aligned}
(\text{준식}) &= x\left(x^2-4x\right)+4x+1\\
&= -5x+4x+1\\
&= -x+1\\
&= -1-i
\end{aligned}
$$

40. $\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$, $\dfrac{\sqrt{c}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\dfrac{c}{b}}$, $|a+b| > |c|$인 a, b, c에 대하여 $\sqrt{(a+b+c)^2} - |a+b| - \sqrt{c^2}$의 값은?

① $2a$　　② $2b$　　③ $-2c$　　④ $-2a$　　⑤ $-3b$

해설

$\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$ 이므로, $a \le 0,\ b \le 0$

$\dfrac{\sqrt{c}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\dfrac{c}{b}}$ 이므로, $b < 0,\ c \ge 0$

$|a+b| > |c|$ 이므로, $-(a+b) > 0$

$\therefore\ a+b+c < 0$

$$\begin{aligned}\therefore (\text{주어진 식}) &= |a+b+c| - |a+b| - |c| \\ &= -(a+b+c) + (a+b) - c \\ &= -2c\end{aligned}$$

41. 자연수 n 에 대하여 $i(1+i)^n$ 이 양의 실수일 때, 다음 중 n 의 값이 될 수 있는 것은?

① 18 ② 19 ③ 20 ④ 21 ⑤ 22

해설

$i(1+i)^n = p(p>0)$, $(1+i)^n = \frac{p}{i} = -pi$

즉, $(1+i)^n =$ 음수 $\times\, i$ 이어야 한다.

이 때, n 이 홀수이면 $(1+i)^n$ 은 순허수꼴이 될 수 없다.

$n = 2k$ 일 때, $(1+i)^{2k} = (2i)^k$

$k = 4m$ 이면 $(2i)^{4m}$ 이 양의 정수이므로

$k = 4m+1 \Rightarrow (1+i)^{2k} = (2i)^k = (2i)^{4m+1} \Rightarrow$ 양수 $\times\, 2i$

$k = 4m+2 \Rightarrow (1+i)^{2k} = (2i)^k = (2i)^{4m+2} \Rightarrow$ 양수 $\times\, (-4)$

$k = 4m+3 \Rightarrow (1+i)^{2k} = (2i)^k = (2i)^{4m+3} \Rightarrow$ 양수 $\times\, (-8i)$

따라서 $k = 4m+3$, 즉 $n = 2k = 8m+6$ 일 때 조건을 만족한다.

주어진 수 중에서 알맞은 것은 22 이다.

42. $f(x)=\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{50}$ 일 때, $f\left(\frac{1+i}{1-i}\right)+f\left(\frac{1-i}{1+i}\right)$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$\frac{1+i}{1-i}=i,\ \frac{1-i}{1+i}=-i$

$\therefore$ (준식) $=\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{50}+\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{50}$
$=(-i)^{50}+(i)^{50}$
$=(-i)^{2}+(i)^{2}$
$=-2$

43. 서로 다른 두 복소수 x, y 가 $x^2 - y = i$, $y^2 - x = i$ 를 만족할 때, $x^3 + y^3$ 의 값을 구하시오. (단, $i = \sqrt{-1}$)

▶ 답:

▷ 정답: $2 - 3i$

해설

$x^2 - y = i \cdots$ ①, $y^2 - x = i \cdots$ ② 에서

① - ② 하면 : $(x+y)(x-y) + (x-y) = 0$,

$(x-y)(x+y+1) = 0$

조건에서 $x \neq y$ 이므로 $x + y = -1$ 이다.

① + ②하면 $x^2 + y^2 - x - y = 2i$

식을 변형하면 $(x+y)^2 - 2xy - (x+y) = 2i$

$\therefore\ xy = 1 - i$

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 &= (x+y)^3 - 3xy(x+y) \\ &= (-1)^3 - 3(1-i)(-1) \\ &= 2 - 3i \end{aligned}$$

44. 방정식 $ax^2 + ibx + c = 0$에 대하여 다음 설명 중 타당한 것은?

① z가 주어진 방정식의 근이면 $\overline{z}$도 주어진 방정식의 근이다.

② z가 주어진 방정식의 근이면 $i\overline{z}$도 주어진 방정식의 근이다.

③ z가 주어진 방정식의 근이면 iz는 $ax^2 + bx + c = 0$의 근이다.

④ z가 주어진 방정식의 근이면 $-\overline{z}$도 주어진 방정식의 근이다.

⑤ z가 주어진 방정식의 근이면 $-i\overline{z}$는 $ax^2 + bx + c = 0$의 근이다.

해설

z가 주어진 방정식의 근이라면
$a,\ b,\ c$는 실수이므로 켤레복소수의 성질을 적용하면
$az^2 + ibz + c = 0,\ \overline{az^2 + ibz + c} = 0$
$a\overline{(z^2)} - ib\overline{z} + c = 0,$
$a(-\overline{z})^2 + ib(-\overline{z}) + c = 0$이므로
$-\overline{z}$도 주어진 방정식의 근이다.

45. α, β 가 복소수일 때, 다음 중에서 참인 것을 <u>모두</u> 고르면? (단, α 는 α 의 켤레복소수, $\overline{\beta}$ 는 β 의 켤레복소수이다.)

ㄱ $\alpha = \overline{\beta}$ 일 때, $\alpha\beta = 0$ 이면 $\alpha = 0$ 이다.

ㄴ $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ 이면, $a = 0$ 이고 $\beta = 0$ 이다.

ㄷ $\alpha = \beta$ 이면, $\alpha + \beta$, $\alpha\beta$ 는 모두 실수이다.

ㄹ $\alpha\overline{\beta} + \overline{\alpha}\beta$ 는 순허수이다.

ㅁ $\alpha - \beta$ 가 실수이면 $\alpha > \beta$ 이다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄴ, ㄷ, ㄹ
④ ㄱ, ㄷ, ㄹ　⑤ ㄱ, ㄷ, ㄹ, ㅁ

해설

$\alpha = a + bi$,$\beta = c + di$ $(a, b, c, d$ 는 실수)

ㄱ $\alpha = \overline{\beta} \Rightarrow \beta = \overline{\alpha}$

$\alpha\beta = 0 \Leftrightarrow \alpha\overline{\alpha} = 0$

$(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = 0$

$\therefore a = 0, b = 0 \Rightarrow \alpha = 0$(참)

ㄴ 반례 : $\alpha = 1, \beta = i$

ㄷ $\alpha + \beta = 2a + 2bi, \alpha\beta = (a^2 - b^2) + 2abi$(거짓)

ㄹ $\alpha\overline{\beta} + \overline{\alpha}\beta = 2(ac + bd) \Rightarrow$ 실수 (거짓)

ㅁ $\alpha - \beta = (a - c) + (b - d)i \therefore b - d = 0,\ b = d$ $\alpha > \beta$ 는 알 수 없다(거짓)

46. $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}i}{2}$ 에 대하여 $z = \dfrac{\alpha - 1}{\alpha + 1}$ 이라 할 때, $7z\bar{z}$ 의 값을 구하시오.
(단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수이고 $i = \sqrt{-1}$ 이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

두 복소수 $x,\ y$ 에 대하여 $\overline{\left(\dfrac{y}{x}\right)} = \dfrac{\bar{y}}{\bar{x}}$ 이다.

$z = \dfrac{\alpha - 1}{\alpha + 1}$ 에서 $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}i}{2}$ 이므로
직접 α 를 대입하여 z 를 구하고 $\bar{z}$ 를 구해서 풀 수도 있지만 그렇게 하면 계산이 너무 어려워진다.
따라서 복소수의 켤레복소수의 성질을 이용하여 풀도록 시도해 보자.

주어진 문제에서 $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}i}{2}$

이므로 $\bar{\alpha} = \dfrac{1-\sqrt{5}i}{2}$ 이다.

따라서, $\alpha + \bar{\alpha} = 1,\ \alpha\bar{\alpha} = \dfrac{3}{2}$ 이고

$z = \dfrac{\alpha - 1}{\alpha + 1},\ \bar{z} = \dfrac{\bar{\alpha} - 1}{\bar{\alpha} + 1}$ 이므로

$$\begin{aligned} z\bar{z} &= \frac{(\alpha - 1)(\bar{\alpha} - 1)}{(\alpha + 1)(\bar{\alpha} + 1)} \\ &= \frac{\alpha\bar{\alpha} - (\alpha + \bar{\alpha}) + 1}{\alpha\bar{\alpha} + (\alpha + \bar{\alpha}) + 1} \\ &= \frac{\frac{3}{2} - 1 + 1}{\frac{3}{2} + 1 + 1} \\ &= \frac{3}{7} \end{aligned}$$

$\therefore\ 7z\bar{z} = 7 \times \dfrac{3}{7} = 3$

47. 방정식 $(2+3i)z+(2-3i)\bar{z}=2$를 만족시키는 복소수z는? (단, $\bar{z}$ 는 z의 켤레복소수)

① 존재하지 않는다.   ② 한 개 있다.

③ 두 개뿐이다.   ④ 무수히 많이 있다.

⑤ 세 개뿐이다.

해설

$z=a+bi$ (a, b 는 실수) 라 놓으면,
$(2+3i)z+(2-3i)\bar{z}=2$ 에서
$(2+3i)(a+bi)+(2-3i)(a-bi)=2$
$2(2a-3b)=2$
$\therefore\ 2a-3b=1$ 을 만족하는 실수 a, b 의 쌍은 무수히 많다.

48. $x=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $x^5+x^4+x^3+x^2+1$ 의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① 0　　② $\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$　　③ $\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$

④ $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$　　⑤ $\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

해설

$x=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$ 의 양변에 2를 곱하고 1을 이항한 후 양변을 제곱해서 정리하면, $x^2-x+1=0$

$x^5+x^4+x^3+x^2+1$ 를 x^2-x+1 로 직접 나누면

몫이 x^3+2x^2+2x+1 이고 나머지는 $-x$ 이다.

즉, $x^5+x^4+x^3+x^2+1$

$=(x^2-x+1)(x^3+2x^2+2x+1)-x$

$\therefore\ x^5+x^4+x^3+x^2+1$

$=-x\ (\because x^2-x+1=0)$

$=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

해설

$x^2-x+1=0$ 을 만든 다음 양변에 $x+1$ 를 곱하면

$(x+1)(x^2-x+1)=0 \Rightarrow x^3+1=0 \Rightarrow x^3=-1$

$$x^5+x^4+x^3+x^2+1=-x^2-x-1+x^2+1$$
$$=-x=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$$

49. $\alpha=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$, $\beta=\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $\alpha^{99}+\beta^{99}$ 의 값을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$\alpha=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2},\beta=\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$ 에서 각각 양변에 2를 곱하고 1을 이항한 후 양변을 제곱해서 정리하면

$\alpha^2-\alpha+1=0,\beta^2-\beta+1=0$

두 식에 각각 $\alpha+1,\beta+1$ 를 곱하면

$(\alpha+1)(\alpha^2-\alpha+1)=0,(\beta+1)(\beta^2-\beta+1)=0$

$\therefore\ \alpha^3=-1,\beta^3=-1$

$\therefore \alpha^{99}+\beta^{99}=\left(\alpha^3\right)^{33}+\left(\beta^3\right)^{33}=-1-1=-2$

해설

$\alpha+\beta=1,\alpha\beta=1$ 이므로

α,β 를 두 근으로 하는 이차방정식을 만들면

$x^2-x+1=0$

$\therefore (x+1)\left(x^2-x+1\right)=\left(x^3+1\right)=0$

$\alpha^3=-1,\beta^3=-1$

$\therefore \alpha^{99}+\beta^{99}=\left(\alpha^3\right)^{33}+\left(\beta^3\right)^{33}=-1-1=-2$

50. 실수 $x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_9$ 가 $16 + x_1 \times x_2 \times \cdots \times x_9 = 0$ 을 만족할 때, $\sqrt{x_1} \times \sqrt{x_2} \times \cdots \times \sqrt{x_9}$ 의 값들의 곱을 구하면?

① 8　　② 16　　③ 24　　④ 36　　⑤ 14

해설

$x_1 \times x_2 \times\ \cdots\ x_9 = -16$ 이므로
$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_9$ 중에서 음수의 개수는 홀수개이다.
이 중에서 음수인 것들은 그 절대값을 취하여
$y_1,\ y_2,\ y_3,\ \cdots,\ y_m\ \ (y_i > 0)$ 이라 하고 양수인 것들은
$z_1,\ z_2,\ z_3,\ \cdots,\ z_n\ (z_i > 0)$ 이라 하자.
그러면 $y_1 y_2 \cdots y_m z_1 z_2 \cdots z_n = 16\ (m + n = 9,\ m :$ 홀수$)$
i) $m = 4k + 1\ (k = 0,\ 1,\ 2)$ 일 때,

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= \sqrt{y_1 y_2 \cdots y_m z_1 z_2 \cdots z_n} \cdot i^{4k+1} \\ &= \sqrt{16} \times (i^4)^k \times i \\ &= 4i\end{aligned}$$

ii) $m = 4k + 3\ (k = 0,\ 1)$ 일 때,

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= \sqrt{y_1 y_2 \cdots y_m z_1 z_2 \cdots z_n} \cdot i^{4k+3} \\ &= \sqrt{16} \times (i^4)^k \times i^3 \\ &= -4i\end{aligned}$$

$\therefore$ i), ii) 에서 $4i \times (-4i) = 16$