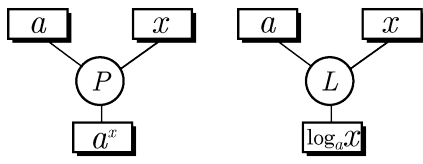
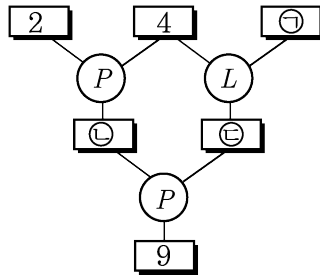


1. a^x 과 $\log_a x$ 를 다음과 같이 나타내었다.



이때, 다음의 ㉠에 알맞은 값은?



- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$\textcircled{\text{L}} = 2^4 \quad \textcircled{\text{C}} = \log_4^{\textcircled{7}}$$

$$\textcircled{L}^{\textcircled{E}} = 9$$

$$16^{\log_4 9} = 9$$

$$\textcircled{7}^{\log_4^{16}} = 9$$

$$\begin{aligned} \textcircled{7}^2 &= 9 \\ \textcircled{7} &= 3 \end{aligned}$$

$$\textcircled{7} = 3$$

2. 모든 실수 x 에 대하여 $\log_{|a-3|}(3ax^2 - ax + 1)$ 이 정의되기 위한 정수 a 의 개수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

(i) 밑의 조건에서 $|a-3| > 0$ 이고 $|a-3| \neq 1$
 $\therefore a \neq 3, a \neq 2, a \neq 4 \cdots \cdots \textcircled{1}$

(ii) 진수조건에서 $3ax^2 - ax + 1 > 0$

① $a = 0$ 일 때, $1 > 0$ 이므로 성립

② $a > 0$ 일 때, 방정식 $3ax^2 - ax + 1 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = a^2 - 12a < 0, a(a-12) < 0$$

$$\therefore 0 < a < 12$$

①, ②에서 $0 \leq a < 12 \cdots \cdots \textcircled{2}$

①, ②을 동시에 만족하는 정수는 0, 1, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11의 9개다.

3. 다음은 지수법칙 $a^{r+s} = a^r a^s$ 으로부터 모든 양수 x, y 에 대하여 $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$ 가 성립함을 증명한 것이다. (단, $a > 0, a \neq 1$)

$r = \log_a x, s = \log_a y$ 로 놓으면
 $a^r = x, a^s = \boxed{\text{㉠}}$
지수법칙으로부터 $a^{r+s} = \boxed{\text{㉡}}$
로그의 정의에 의하여 $r + s = \log_a \boxed{\text{㉢}}$
따라서, $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$ 이다.

- ① $x, x + y$
- ② $y, x + y$
- ③ x, xy
- ④ y, xy
- ⑤ $x, \frac{y}{x}$

해설

$s = \log_a y$ 이므로 $y = a^s \therefore \text{㉠ } y$
 $a^{r+s} = a^r a^s = xy \therefore \text{㉡ } xy$

4. 1이 아닌 세 자연수 x, y, z 가 다음 두 식을 만족한다.

$\ominus \log_y z + \log_z x + \log_x y = \frac{5}{3}$

$\oslash \log_y z \log_z x + \log_z x \log_x y + \log_x y \log_y z = \frac{5}{3}$

이때, $(\log_y z)^2 + (\log_z x)^2 + (\log_x y)^2$ 의 값을 구하면?

- ① $-\frac{20}{9}$

② $-\frac{11}{9}$

③ $-\frac{5}{9}$

④ $-\frac{1}{9}$

⑤ 1

해설

$$\log_y z = A, \log_z x = B, \log_x y = C \text{라 하면}$$
$$\log_z y = \frac{1}{A}, \log_x z = \frac{1}{B}, \log_y x = \frac{1}{C} \text{이므로}$$
$$A + B + C = \frac{5}{3} \text{에서 } \frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} = \frac{AB + BC + CA}{ABC}$$
$$\text{이므로 } AB + BC + CA = \frac{5}{3}$$
$$\therefore (\log_z y)^2 + (\log_z x)^2 + (\log_x y)^2$$
$$= A^2 + B^2 + C^2$$
$$= (A + B + C)^2 - 2(AB + BC + CA)$$
$$= \left(\frac{5}{3}\right)^2 - 2 \times \frac{5}{3} = \frac{25}{9} - \frac{10}{3} = -\frac{5}{9}$$

5. $\log_2 5$ 의 정수부분을 x , 소수부분을 y 라 할 때, $\frac{2^{-x} + 2^{-y}}{2^x + 2^y}$ 의 값은?

- ① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 2

해설

$\log_2 4 < \log_2 5 < \log_2 8$ 이므로

$x = 2, y = \log_2 5 - 2 = \log_2 \frac{5}{4}$

$2^{-x} = 2^{-2} = \frac{1}{4}, 2^x = 4$

$2^{-y} = 2^{-\log_2 \frac{5}{4}} = 2^{\log_2 (\frac{5}{4})^{-1}} = 2^{\log_2 \frac{4}{5}} = \frac{4}{5}$

$2^y = 2^{\log_2 \frac{5}{4}} = \frac{5}{4}$

$\therefore \frac{2^{-x} + 2^{-y}}{2^x + 2^y} = \frac{\frac{1}{4} + \frac{4}{5}}{4 + \frac{5}{4}} = \frac{\frac{21}{20}}{\frac{21}{4}} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$

6. 이차방정식 $x^2 + ax + 6 = 0$ 의 두 근 α, β 의 두 근 $\alpha, \beta (0 < \alpha < \beta)$ 에 대하여 $b = \beta - \alpha$ 라 할 때, $\log_b \alpha^{\frac{1}{3}} + \log_b \beta^{\frac{1}{3}} = \frac{2}{3}$ 이다. 이때, 상수 a, b 에 대하여 $a^2 + b^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 36

해설

이차방정식 $x^2 + ax + 6 = 0$ 의 두 근이 $\alpha, \beta (0 < \alpha < \beta)$ 이므로
 $\alpha + \beta = -a, \alpha\beta = 6$
 $\log_b \alpha^{\frac{1}{3}} + \log_b \beta^{\frac{1}{3}} = \log_b (\alpha\beta)^{\frac{1}{3}}$
 $= \frac{1}{3} \log_b 6 = \frac{2}{3}$ 에서
 $\log_b 6 = 2$ 이므로 $b^2 = 6$
 $b^2 = (\beta - \alpha)^2$
 $= (\beta + \alpha)^2 - 4\alpha\beta = a^2 - 24 = 6$
 $\therefore a^2 = 30$
 $\therefore a^2 + b^2 = 36$

7. 세 수 $A = 3^{\log_3 9 - \log_3 3}$, $B = \log_3 5 + \log_3 4$, $C = \log_4 2 + \log_3 3$ 의
대소 관계를 바르게 나타낸 것은?

- ① $A < B < C$ ② $A < C < B$ ③ $B < A < C$
④ $B < C < A$ ⑤ $C < B < A$

해설

$$A = 3^{\log_3 9 - \log_3 3} = 3^{2-1} = 3$$

$$B = \log_3 5 + \log_3 4 = \log_3 20$$

이때, $\log_3 9 < \log_3 20 < \log_3 27$ 이므로 $2 < \log_3 20 < 3$

$$C = \log_4 2 + \log_3 3 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

$$\therefore C < B < A$$

8. 다음 세 실수 A, B, C 의 대소 관계를 바르게 나타낸 것은?

$$A = \log_9 3 + \log_5 \sqrt{5}$$
$$B = 5^{2\log_{25} 2}$$
$$C = \log_2 3 \times \log_3 5 \times \log_5 2 \sqrt{2}$$

- ① $A < B < C$

② $A < C < B$

③ $B < C < A$
- ④ $C < A < B$

⑤ $C < B < A$

해설

$$A = \log_{3^2} 3 + \log_5 5^{\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{1}{2} \log_3 3 + \frac{1}{2} \log_5 5$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$B = (5^2)^{\log_{25} 2}$$
$$= 25^{\log_{25} 2}$$
$$= 2^{\log_{25} 25}$$
$$= 2$$

$$C = \frac{\log_a 3}{\log_a 2} \times \frac{\log_a 5}{\log_a 3} \times \frac{\log_a 2 \sqrt{2}}{\log_a 5}$$
$$= \frac{\log_a 2 \sqrt{2}}{\log_a 2}$$
$$= \frac{\frac{3}{2} \log_a 2}{\log_a 2}$$
$$= \frac{3}{2}$$
$$\therefore A < C < B$$

9. 다음은 2.3^9 의 값을 구하는 과정이다.

$$\begin{aligned}\log 2.3^9 &= 9 \log 2.3 = (\ominus) \\ \log 1.8 &= 0.2553 \text{ 이므로} \\ \log 2.3^9 &= 3 + 0.2553 \\ &= 3 + \log 1.8 \\ &= \log (\textcircled{\hspace{1cm}}) \\ \therefore 2.3^9 &= (\textcircled{\hspace{1cm}})\end{aligned}$$

위의 과정에서 $(\ominus)$, $(\textcircled{\hspace{1cm}})$ 에 알맞은 수를 차례로 나열한 것은? (단, $\log 1.8 = 0.2553$, $\log 2.3 = 0.3617$)

- ①

3.2553, 1800

②

3.2553, 180

③

4.2553, 2800

④

4.52553, 280

⑤

5.2553, 18000

해설

$$\begin{aligned}\log 2.3 &= 0.3617 \text{ 이므로} \\ \log 2.3^9 &= 9 \log 2.3 = 9 \times 0.3617 = 3.2553 \\ \log 1.8 &= 0.2553 \text{ 이므로} \\ \log 2.3^9 &= 3 + 0.2553 \\ &= 3 + \log 1.8 = \log 10^3 + \log 1.8 \\ &= \log (10^3 + 1.8) = \log 1800 \\ \text{따라서 } 2.3^9 &= 1800\end{aligned}$$

10. $\log x$ 와 $\log \frac{10}{x}$ 의 정수 부분의 합과 소수 부분의 합을 순서대로 나열한 것은? (단, $\log x$ 의 소수 부분은 0이 아니다.)

① 1, -1 ② -1, 1 ③ 0, 1 ④ 1, 1 ⑤ 1, 0

해설

$\log x = n + \alpha$, ($0 < \alpha < 1$) 이라하면

$$\log \frac{10}{x} = 1 - \log x$$

$$= 1 - n - \alpha$$

$$= 1 - n - \alpha + 1 - 1$$

$$= -n + 1 - \alpha$$

$$0 < \alpha < 1 \text{ 이므로 } 0 < 1 - \alpha$$

$$\therefore \log \frac{10}{x} \text{의 정수 부분 : } -n, \log \frac{10}{x} \text{의 소수 부분 : } 1 - \alpha$$

$$\text{정수 부분의 합 : } n - n = 0$$

$$\text{소수 부분의 합 : } \alpha + 1 - \alpha = 1$$

11. $1 < x < 10$ 인 실수 x 에 대하여 $\log x^3$ 과 $\log \frac{1}{x^2}$ 의 소수 부분이 같은 모든 x 의 값의 곱을 구하면?

- ① 10 ② $10^{\frac{8}{5}}$ ③ 10^2 ④ $10^{\frac{5}{2}}$ ⑤ 10^3

해설

$1 < x < 10$ 에서 $0 < \log x < 1$ 이므로 $\log x = \alpha$ 로 놓으면
 $\log x^3 = 3 \log x = 3\alpha$,

$$\log \frac{1}{x^2} = \log x^{-2} = -2 \log x = -2\alpha$$

이때, $\log x^3 - \log \frac{1}{x^2} = 5\alpha$ 이므로 5α 는 정수이다.

한편, $0 < \alpha < 1$ 이므로 $0 < 5\alpha < 5$

$$\therefore 5\alpha = 1, 2, 3, 4$$

$$\text{즉, } \alpha = \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5} \text{이므로}$$

$$\log x = \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}$$

$$\therefore x = 10^{\frac{1}{5}}, 10^{\frac{2}{5}}, 10^{\frac{3}{5}}, 10^{\frac{4}{5}}$$

따라서 모든 x 의 값들의 곱은

$$10^{\frac{1}{5} + \frac{2}{5} + \frac{3}{5} + \frac{4}{5}} = 10^2$$

12. $\log A$ 의 정수 부분, 소수 부분이 $3x^2 - 5x + a = 0$ 의 두 근일 때, 상수 a 의 값은?

- ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ 2 ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 3

해설

$\log A = n + \alpha$ (n 은 정수, $0 \leq \alpha < 1$) 이라 하면

$$n + \alpha = \frac{5}{3}, \quad n \cdot \alpha = \frac{a}{3}$$

$$n = 1, \quad \alpha = \frac{2}{3}$$

$$\therefore a = 2$$

13. 채소에 뿌리는 어떤 살충제는 시간이 지나면 인체에 해가 없는 물질로 분해되는데 처음에 뿌린 살충제의 양 M_0 와 뿌린 후 x 일이 지난 후 남아 있는 살충제의 양 $M(x)$ 사이에 $M(x) = M_0 \times 5^{-kx}$ (k 는 상수)의 관계가 성립한다고 한다. 처음에 채소에 2kg의 살충제를 뿌렸더니 10일이 지난 후 1kg 이때, k 의 값은?

① $-\log_2 5$

② $-\log_5 2$

③ $\frac{1}{10} \log 2$

④ $\frac{1}{10} \log_5 2$

⑤ $\frac{1}{10} \log_2 5$

해설

$M(x) = M_0 \times 5^{-kx}$ 에서 2kg의 살충제를 뿌렸더니 10일이 지난 후 1kg의 살충제가 남았으므로

$$1 = 2 \cdot 5^{-10k}, \quad 5^{-10k} = \frac{1}{2}$$

$$-10k \log 5 = \log \frac{1}{2} = -\log 2$$

$$10k = \frac{\log 2}{\log 5} = \log_5 2$$

$$\therefore k = \frac{1}{10} \log_5 2$$

14. 어느 반도체 업체의 2001년 말의 매출액이 8억원이었다. 13년동안 매출이 지속적으로 상승하여 지난 2014년 말에는 매출액이 160억원이 되었다고 한다. 다음의 상용로그표를 이용하여 이 회사의 연평균 매출신장률을 구하면?(단, $\log 2 = 0.3$)

<상용로그표>

수	4	5	6	7	8
1.0	.0170	.0212	.0253	.0294	.0334
1.1	.0569	.0607	.0645	.0682	.0719
1.2	.0934	.0969	.1004	.1038	.1072

- ① 약 16%
- ② 약 18%
- ③ 약 24%
- ④ 약 26%
- ⑤ 약 28%

해설

연평균 매출신장률을 r 이라 하면
 $8(1+r)^{13} = 160, (1+r)^{13} = 20$
양변에 상용로그를 취하면
 $13\log(1+r) = \log 20 = 1 + \log 2$
 $\log(1+r) = \frac{1 + \log 2}{13} = 0.1$
 $\log 1.25 = 0.0969$ 이고
 $\log 1.26 = 0.1004$ 이므로
 $x : 0.01 = 31 : 35$
 $\therefore x \approx 0.00886$
 $1+r \approx 1.25 + 0.00886$
 ≈ 1.25886
 $\therefore r \approx 0.25886$ 이므로 연평균 매출신장률은 약 26%이다.

15. 5년에 한 번씩 시행하는 인구주택총조사 결과 A 시의 인구는 5년마다 7%증가한다고 한다. 2015년의 A 시의 인구가 100만 명이었을 때, 2050년의 이 시의 인구는? (단, $\log 1.07 = 0.03$, $\log 1.62 = 0.21$ 로 계산한다.)

- ① 121만명 ② 145만명 ③ 162만명
④ 178만명 ⑤ 185만명

해설

2050년은 2015년으로부터 35년 후이고 35년은 5년이 7번 지난 것이므로 2050년의 A 의 인구는

$$100 \times (1 + 0.07)^7 = 100 \times 1.07^7 (\text{만 명})$$

$$\log 1.07^7 = 7 \log 1.07 = 7 \times 0.03 = 0.21$$

이때 $\log 1.62 = 0.21$ 이므로

$$1.07^7 = 1.62$$

따라서 2050년의 A 시의 인구는 $100 \times 1.62 = 162$ (만 명)

16. $\log_3 375$ 의 소수 부분을 a 라 할 때, $\left[5^a + \frac{1}{5^a}\right]$ 의 값은? (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$\log_5 125 < \log_3 375 < \log_5 625$ 이므로

$3 < \log_5 375 < 4$

$\therefore a = \log_5 375 - 3 = \log_5 375 - \log_5 125$

$= \log_5 \frac{375}{125} = \log_5 3$

$\left[5^a + \frac{1}{5^a}\right] = \left[5^{\log_5 3} + \frac{1}{5^{\log_5 3}}\right] \left[3 + \frac{1}{3}\right] = 3$

17. 1이 아닌 두 양수 a, b 에 대하여 $n \leq \log_a b < n+1$ (n 은 정수)이 성립할 때, $f(a, b) = n$ 으로 정의한다. 옳은 내용을 보기에서 고른 것은?

보기

- ㉠ $f(2, 9) = 4$ 이다.
- ㉡ $f(a, b) = 2$ 이면 $f(b, a) = 0$ 이다.
- ㉢ $f(a, b) = -2$ 이면 $f(b, a) = -1$ 이다.

- ① ㉠ ② ㉡ ③ ㉠, ㉡
④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $3 < \log_2 9 < 4$ 이므로 $f(2, 9) = 3$ (거짓)
㉡ $f(a, b) = 2$ 이면 $2 \leq \log_a b < 3$
 $\frac{1}{3} < \log_b a \leq \frac{1}{2} \quad \therefore f(b, a) = 0$ (참)
㉢ $f(a, b) = -2$ 이면 $-2 \leq \log_a b < -1$
 $-1 < \log_b a \leq -\frac{1}{2} \quad \therefore f(b, a) = -1$ (참)
따라서 옳은 것은 ㉡, ㉢이다.

18. 1이 아닌 양수 a, b, c 가 다음 두 조건을 만족한다.

- $\textcircled{\tiny \Gamma} \log_a b + \log_b c + \log_c a = 4$
- $\textcircled{\tiny \Delta} \log_b a + \log_c b + \log_a c = -3$

이 때, $(\log_a b)^2 + (\log_b c)^2 + (\log_c a)^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 22

해설

$\log_a b = \alpha, \log_b c = \beta, \log_c a = \gamma$ 라 하면
 $\log_a b + \log_b c + \log_c a = \alpha + \beta + \gamma = 4 \cdots \textcircled{\tiny \Gamma}$
 $\log_b a + \log_c b + \log_a c = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = -3 \cdots \textcircled{\tiny \Delta}$
 $\textcircled{\tiny \Delta}$ 에서 $\frac{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma} = -3$ 이고
 $\alpha\beta\gamma = \log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a = 1$ 이므로
 $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -3$
 $\therefore (\log_a b)^2 + (\log_b c)^2 + (\log_c a)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$
 $= (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) = 22$

19. 세 양수 a, b, c 에 대하여
 $a^x = (\sqrt{b})^y = (\sqrt[3]{c})^z = 125, abc = 5\sqrt[5]{5}$
가 성립할 때, $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z}$ 의 값은?

- ① $\frac{2}{5}$ ② $\frac{4}{5}$ ③ $\frac{6}{5}$ ④ $\frac{18}{5}$ ⑤ $\frac{24}{5}$

해설

$$\begin{aligned} a^x &= b^{\frac{y}{2}} = c^{\frac{z}{3}} = 5^3 \text{ 이므로} \\ a^x &= 5^3 \text{ 에서 } x = \log_a 5^3 = 3 \log_a 5 \\ \therefore \frac{1}{x} &= \frac{1}{3} \log_5 a \\ b^{\frac{y}{2}} &= 5^3 \text{ 에서 } \frac{y}{2} = \log_b 5^3 = 3 \log_b 5 \\ \therefore \frac{2}{y} &= \frac{1}{3} \log_5 b \\ c^{\frac{z}{3}} &= 5^3 \text{ 에서 } \frac{z}{3} = \log_c 5^3 = 3 \log_c 5 \\ \therefore \frac{3}{z} &= \frac{1}{3} \log_5 c \\ \therefore \frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z} &= \frac{1}{3} \log_5 a + \frac{1}{3} \log_5 b + \frac{1}{3} \log_5 c \\ &= \frac{1}{3} (\log_5 a + \log_5 b + \log_5 c) \\ &= \frac{1}{3} \log_5 abc \\ &= \frac{1}{3} \log_5 5^{\frac{6}{5}} (\because abc = 5\sqrt[5]{5} = 5^{\frac{6}{5}}) \\ &= \frac{2}{5} \end{aligned}$$

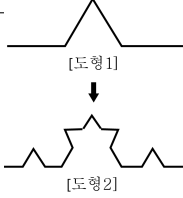
20. 다음은 도형의 차원에 대한 설명이다.

선분을 2등분하면 2개의 선분으로 나누어지고 3등분하면 3개로 나누어진다. 이것을 각각 $2 = 2^1$, $3 = 3^1$ 로 나타낼 수 있으므로 선분의 차원은 1차원이다. 정사각형의 각 변을 2등분하면 정사각형 4개로 나누어지고 3등분하면 9개로 나누어진다. 이것을 각각 $4 = 2^2$, $9 = 3^2$ 로 나타낼 수 있으므로 정사각형의 차원은 2차원이다. 정육면체의 각 변을 2등분하면 정육면체 8개로 나누어지고 3등분하면 27개로 나누어진다. 이것을 각각 $8 = 2^3$, $27 = 3^3$ 로 나타낼 수 있으므로 정육면체의 차원은 3차원이다. 일반적으로 어떤 도형을 x 등분하여 같은 모양 y 개로 나뉘질 때, $y = x^a$ 의 관계가 성립하면 a 를 그 도형의 차원이라고 한다.

오른쪽 그림은 [도형1]을 이용하여 같은 모양으로

이루어진 [도형2]를 만든 것이다. 이때, [도형1]의

차원을 구하면?



- ① $\log 2$ ② $\log 3$ ③ $\frac{\log 3}{\log 2}$
④ $\frac{\log 2}{\log 3}$ ⑤ $2 \frac{\log 2}{\log 3}$

해설

[도형1]에서 도형의 각 변을 3등분하면 [도형2]와 같이 같은 도형 4개가 만들어진다.

즉, $x = 3$ 일 때, $y = 4$ 이므로 차원을 a 라 하면

$$4 = 3^a$$

양변에 상용로그를 취하면

$$\log 4 = \log 3^a, \quad 2 \log 2 = a \log 3$$

$$\therefore a = \frac{2 \log 2}{\log 3}$$

21. 자연수 x, y 에 대하여 $\log x, \log y$ 의 정수 부분을 각각 m, n 이라 하자. $m^2 + n^2 = 4$ 를 만족하는 x, y 에 대하여 순서쌍 (x, y) 의 개수를 구하면?
- ① 16200 ② 16400 ③ 16600
- ④ 17010 ⑤ 24300

해설

x, y 가 자연수이므로 $m \geq 0, n \geq 0$ 인 정수이고, $m^2 + n^2 = 4$ 인 경우는 다음과 같다.

- (i) $m = 2, n = 0$ 일 때
 $2 \leq \log x < 3$ 이므로 $100 \leq x < 1000$
 $0 \leq \log y < 1$ 이므로 $1 \leq y < 10$
따라서, 순서쌍 (x, y) 의 개수는 $900 \times 9 = 8100$
- (ii) $n = 0, m = 2$ 일 때
(i)의 경우와 순서만 바뀌므로 이때의 순서쌍 (x, y) 의 개수도 8100이다.
- (i), (ii)에 의하여 순서쌍 (x, y) 의 개수는
 $8100 + 8100 = 16200$

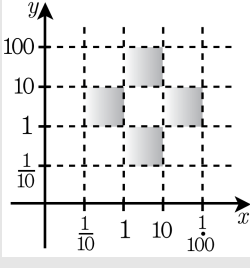
22. 양수 x 에 대하여 $I(x)$ 는 x 의 상용로그의 정수 부분을 나타낸다. 좌표평면에서 $\{(x,y)|\{I(x)\}^2 + \{I(x)\}^2 = 1\}$ 이 나타내는 영역의 넓이는?
- ① 1628.2 ② 1630.4 ③ 1632.6
④ 1634.8 ⑤ 1636.2

해설

$n = \log x < n + 1$ (n 은 정수)
 $m = \log y < m + 1$ (m 은 정수)
 $I(x) = n, I(y) = m$
 $n^2 + m^2 = 1$
 $(n, m) = (1, 0), (-1, 0), (0, 1), (0, -1)$

- (i) $n = 1, m = 0$ 일 때
 $1 \leq \log x < 2$ 이므로 $10 \leq x < 100$
 $0 \leq \log y < 1$ 이므로 $1 \leq y < 10$
(ii) $n = -1, m = 0$ 일 때
 $-1 \leq \log x < 1$ 이므로 $\frac{1}{10} \leq x < 1$
 $0 \leq \log y < 1$ 이므로 $1 \leq y < 10$
(iii) $n = 0, m = 1$ 일 때
 $0 \leq \log x < 1$ 이므로 $1 \leq x < 10$
 $0 \leq \log y < 1$ 이므로 $10 \leq y < 100$
(iv) $n = 0, m = -1$ 일 때
 $0 \leq \log x < 1$ 이므로 $1 \leq x < 10$
 $-1 \leq \log y < 1$ 이므로 $\frac{1}{10} \leq y < 1$

영역을 좌표평면에 나타내면



$\therefore (\frac{9}{10} \times 9 + 90 \times 9) \times 2 = 1636.2$

23. 다음 자연수는 $3 \times 3 \times 3 \times \cdots \times 3$ 과 같이 3을 n 번 곱하여 얻은 11 자리의 수인데, 10^{10} 번째와 10^9 번째 자리의 수가 떨어져 알 수가 없다. 자연수 n 의 값을 구하면? (단, $\log 3 = 0.477$)

□□381059609

- ① 19
- ② 20
- ③ 21
- ④ 22
- ⑤ 2

해설

$3^n = \square\square381059609$ 은 11 자리의 자연수이므로 $\log 3^n$ 의 지표는 10이다.

$\therefore 10 \leq \log 3^n < 11$

$10 \leq n \log 3 < 11$ 이므로 $\frac{10}{\log 3} \leq n < \frac{11}{\log 3}$

이때, $\frac{10}{\log 3} = 20.9 \times \times \times, \frac{11}{\log 3} = 23.0 \times \times \times$ 이므로 n 의 값은

21, 22, 23 중 하나이다.

한편, 3^n 의 일의 자리의 숫자가 같은 수끼리 써보면

$3^1, 3^5, 3^9, \dots, 3^{4k+1} \Rightarrow$ 일의 자리의 수가 모두 3이다.

$3^2, 3^6, 3^{10}, \dots, 3^{4k+2} \Rightarrow$ 일의 자리의 수가 모두 9이다.

$3^3, 3^7, 3^{11}, \dots, 3^{4k+3} \Rightarrow$ 일의 자리의 수가 모두 7이다.

$3^4, 3^8, 3^{12}, \dots, 3^{4k} \Rightarrow$ 일의 자리의 수가 모두 1이다.

그런데, $3^n = \square\square381059609$ 의 일의 자리의 숫자가 9이므로 n 은 $4k + 2$ 의 꼴이다.

따라서, 구하는 n 의 값은 $4 \times 5 + 2 = 22$

24. 자연수 a, b 에 대하여 $\frac{b^2}{a}$ 은 정수 부분이 여섯 자리인 수이고, $\frac{a^2}{b}$ 은 소수 셋째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타난다. 이때, 다음 <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

- ㉠ $\log \frac{b^2}{a}$ 의 소수 부분을 α 라 할 때, $10^{\alpha+6} = \frac{b^2}{a}$ 이다.
- ㉡ $\left\lceil \log \frac{a^2}{b} \right\rceil = -3$ (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대 정수이다.)
- ㉢ a 는 한 자리의 자연수이다.

- ① ㉠
- ② ㉡
- ③ ㉢
- ④ ㉡, ㉢
- ⑤ ㉠, ㉢

해설

- ㉠ $\frac{b^2}{a}$ 은 정수 부분이 여섯 자리이므로 $5 \leq \log \frac{b^2}{a} < 6$ 이다.
따라서 $\alpha = \log \frac{b^2}{a} - 5, \log \frac{b^2}{a} = \alpha + 5$
 $\therefore 10^{\alpha+5} = \frac{b^2}{a}$ (거짓)
- ㉡ $\frac{a^2}{b}$ 은 소수 셋째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타나므로
 $-3 \leq \log \frac{a^2}{b} < -2$ 이다.
 $\therefore \left\lceil \log \frac{a^2}{b} \right\rceil = -3$ (참)
- ㉢ $5 \leq \frac{b^2}{a} < 6$ 이므로 $5 \leq 2 \log b - \log a < 6 \cdots \textcircled{1}$
 $-3 \leq \frac{a^2}{b} < -2$ 이므로 $-3 \leq 2 \log a - \log b < -2 \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1} + \textcircled{2} \times 2$ 에서
 $-1 \leq 3 \log a < 2 \therefore -\frac{1}{3} \leq \log a < \frac{2}{3}$
따라서, $\log a$ 의 정수 부분은 -1 또는 0 이다.
그런데, a 는 자연수이므로 a 는 한 자리의 수이다. (참)
따라서, 옳은 것은 ㉡, ㉢이다.

25. 3^{222} 은 p 자리의 정수이고, 최고 자리의 숫자는 q , 일의 자리의 숫자는 r 이다. 이때, $p+q+r$ 의 값은? (단, $\log 2 = 0.3010$, $\log 3 = 0.4771$)

- ① 121
- ② 123
- ③ 125
- ④ 127
- ⑤ 129

해설

$\log^{222} = 222 \log 3 = 222 \times 0.4771 = 105.9162$
 $\log^{222}$ 의 지표가 105이므로 3^{222} 는 106 자리의 정수이다.
 $\therefore p = 106$
이때
 $\log 8 = \log 2^3 = 3 \log 2 = 3 \times 0.3010 = 0.9030$
 $\log 9 = \log 3^2 = 2 \log 3 = 2 \times 0.4771 = 0.9542$
이므로 $\log 8 < 0.9162 < \log 9$
 $105 + \log 8 < 105.9162 < 105 + \log 9$
 $\log(8 \times 10^{105}) < 3^{222} < \log(9 \times 10^{105})$
따라서 3^{222} 의 최고 자리의 숫자는 8이다. ($q = 8$)
 $3^1 = 3, 3^2 = 9, 3^3 = 27, 3^4 = 81, 3^5 = 243, \dots$ 이므로
 3^n 의 일의 자리의 숫자는 3, 9, 7, 1이 반복된다.
 $222 = 4 \times 55 + 2$ 이므로 3^{222} 의 일의 자리의 숫자는
 3^2 의 일의 자리의 숫자와 같은 9이다. ($r = 9$)
따라서 $p + q + r = 106 + 8 + 9 = 123$

26. $\log x$ 의 정수 부분은 n 이고 $\log x$ 와 $\log \sqrt{x}$ 의 소수 부분의 합이 1 일 때, x 의 값을 구하면?

- ① $10^{n+\frac{2}{3}}, 10^{n+\frac{1}{3}}$ ② $10^n, 10^{n+\frac{1}{3}}$ ③ $10^{n+1}, 10^{n+\frac{1}{3}}$
④ $10^{n+\frac{2}{3}}, 10^{n+1}$ ⑤ $10^{n+\frac{2}{3}}, 10^{n+\frac{4}{3}}$

해설

$$\log x = n + \alpha, \quad 0 \leq \alpha < 1$$

$$\log \sqrt{x} = \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}\alpha$$

(i) n 이 짝수일 때

$$\log \sqrt{x} = \text{정수} + \frac{1}{2}\alpha$$

$$\alpha + \frac{1}{2}\alpha = 1$$

$$\alpha = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \log x = n + \frac{2}{3}$$

$$x = 10^{n+\frac{2}{3}}$$

(ii) n 이 홀수일 때

$$\log \sqrt{x} = \text{정수} + 0.5 + \frac{1}{2}\alpha$$

$$0 \leq \frac{1}{2}\alpha < \frac{1}{2} \text{ 이므로}$$

$$\frac{1}{2}\alpha - 0.5 \text{가 아닌}$$

$$\frac{1}{2}\alpha + 0.5 \text{가 소수 부분이 됨}$$

$$\alpha + \frac{1}{2}\alpha + 0.5 = 1$$

$$\frac{3}{2}\alpha = \frac{1}{2}$$

$$\alpha = \frac{1}{3}$$

$$\log x = n + \frac{1}{3}$$

$$x = 10^{n+\frac{1}{3}}$$

27. 이차방정식 $ax^2 - (3a-1)x + a+1 = 0$ 의 두 근이 $[\log A]$, $\log A - [\log A]$ 일 때, 상수 a 의 값은? (단, $a > 1$, $[x]$ 는 x 를 넘지 않는 최대 정수이다.)

- ① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

해설

$\log A = n + \alpha$ (n 은 정수, $0 \leq \alpha < 1$) 이라하면

$$[\log A] = n$$

$$\log A - [\log A] = n + \alpha - n = \alpha$$

$$n + \alpha = \frac{3a-1}{a}, \quad n\alpha = \frac{a+1}{a}$$

$$n + \alpha = 3 - \frac{1}{a} = 2 + 1 - \frac{1}{a}$$

$a > 1$ 이므로

$$0 < \frac{1}{a} < 1$$

$$-1 < -\frac{1}{a} < 0$$

$$0 < 1 - \frac{1}{a} < 1 \text{ 이므로}$$

$$2 = n, \quad 1 - \frac{1}{a} = \alpha$$

$$2 \cdot (1 - \frac{1}{a}) = \frac{a+1}{a}$$

$$2 - \frac{2}{a} = 1 + \frac{1}{a}$$

$$1 = \frac{3}{a} \quad \therefore a = 3$$

28. a, b 가 유리수라 하면 서로소인 두 정수 p, q 에 대하여 $\log_6(2^a \cdot 3^b) = \frac{q}{p}$ (단, $p = q$)로 쓸 수 있다.

로그의 정의에 의하여 $2^a \cdot 3^b = 6^{\frac{q}{p}}$
이때, $ap =$ (가) 이고 $a \neq b$ 이므로 (나) 이것은 가정에 모순이다.
따라서, $\log_6(2^a \cdot 3^b)$ 은 무리수이다.

위의 증명 과정에서 (가), (나)에 알맞은 것을 차례대로 적은 것은?

- ① $bp, p = q$
- ② $bp, p = 0$
- ③ $bp, p = 0$
- ④ $bp, q = q$
- ⑤ $bp, p = 0$

해설

$2^a \cdot 3^b = 6^{\frac{q}{p}}$ 에서 $(2^a \cdot 3^b)^p = 6^q = (2 \cdot 3)^q$
 $\therefore 2^{ap} \cdot 3^{bp} = 2^q \cdot 3^q$ 에서 $ap = bp \cdots$ (가)
 $(a - b)p = 0$
 $a \neq b$ 이므로 $p = 0 \cdots$ (나)

29. 실수 a 에 관계없이 로그가 정의될 수 있는 것을 보기에서 모두 고른 것은?

보기

- $\textcircled{\text{㉠}} \log_{a^2+1}(a^2+a+1)$
- $\textcircled{\text{㉡}} \log_{2a+2}(a^2+2a+1)$
- $\textcircled{\text{㉢}} \log_{a^2+2}(a^2+2a+3)$

- $\textcircled{\text{1}} \textcircled{\text{㉠}}$
- $\textcircled{\text{2}} \textcircled{\text{㉡}}$
- $\textcircled{\text{3}} \textcircled{\text{㉢}}$
- $\textcircled{\text{4}} \textcircled{\text{㉡}}, \textcircled{\text{㉢}}$
- $\textcircled{\text{5}} \textcircled{\text{㉠}}, \textcircled{\text{㉡}}, \textcircled{\text{㉢}}$

해설

- $\textcircled{\text{㉠}}$ [반례] 밑의 조건에서 $a=0$ 일 때, 성립하지 않는다.
- $\textcircled{\text{㉡}}$ [반례] $a=-1$ 일 때, 진수 $a^2+2a+1=0$ 이므로 로그를 정의할 수 없다.
- $\textcircled{\text{㉢}}$ 진수 $a^2+2a+3=(a+1)^2+2>0$ 이고, 밑 $a^2+2\geq 2$ 이므로 로그가 항상 정의된다. 따라서, ㉢만 옳다.

30. 실수 a 의 값에 관계없이 로그가 정의될 수 있는 것을 보기에서 모두 고른 것은?

보기

㉠ $\log_{a^2-a+2}(a^2+1)$

㉡ $\log_{2|a|+1}(a^2+1)$

㉢ $\log_{a^2+2}(a^2-2a+1)$

① ㉠

② ㉠, ㉡

③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ 밑의 조건에서

$$a^2 - a + 2 = \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 1$$

진수의 조건에서 $a^2 + 1 \geq 1$

따라서, 항상 로그를 정의할 수 있다.

㉡ (반례) $a = 0$ 일 때, 밑 $2|a| + 1 = 1$ 이므로
로그를 정의할 수 없다.

㉢ (반례) $a = 1$ 일 때, 진수 $a^2 - 2a + 1 = 0$ 이므로
로그를 정의할 수 없다.

따라서, 항상 로그를 정의할 수 있는 것은 ㉠이다.

31. 다음은 로그의 성질 $\log q^r = r \log q$ 를 이용하여 m 이 0이 아닌 실수일 때, $\log_{a^m} b^n = \frac{n}{m} \log_a b$ (단, a 는 1이 아닌 양수, b 는 양수)가 성립함을 증명한 것이다.

$x = \log_{a^m} b^n$ 로 놓으면
 $b^n = (\text{가}) = (a^x)^{(\text{나})}$ 이므로
 $a^x = (\text{다})$
따라서 $x = \log_a (\text{다}) = \frac{n}{m} \log_a b$ 가 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 차례로 나열한 것은?

- ① (가) : a^x , (나) : m , (다) b^n
- ② (가) : a^x , (나) : $\frac{m}{n}$, (다) $b^{\frac{n}{m}}$
- ③ (가) : $(a^m)^x$, (나) : m , (다) $b^{\frac{n}{m}}$
- ④ (가) : $(a^m)^x$, (나) : m , (다) b^n
- ⑤ (가) : $(a^m)^x$, (나) : $\frac{m}{n}$, (다) $b^{\frac{n}{m}}$

해설

$x = \log_{a^m} b^n$ 로 놓으면 로그의 정의에 의하여
 $b^n = (a^m)^x = (a^x)^m$
위의 식의 양변을 $\frac{1}{m}$ 제곱하면 $b^{\frac{n}{m}} = a^x$
따라서, $x = \log_a b^{\frac{n}{m}} = \frac{n}{m} \log_a b$ 가 성립한다.

32. 두 자연수 m, n 의 최대공약수를 G , 최소공배수를 L 이라 할 때, 다음 두 식
- $$\log_3 L - \log_3 G = 2 + \log_3 2,$$
- $$\log_2 L + \log_2 G = 5 + \log_2 3$$
- 이 성립한다. $G < m < n < L$ 일 때, $m + n$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 44

해설

$\log_3 L - \log_3 G = 2 + \log_3 2$ 에서

$$\log_3 \frac{L}{G} = \log_3 18 \quad \therefore \frac{L}{G} = 18 \cdots \textcircled{1}$$

$\log_2 L + \log_2 G = 5 + 2 \log_2 3$ 에서

$$\log_2 LG = \log_2 2^5 \cdot 3^2 \quad \therefore LG = 2^5 \cdot 3^2$$

$$\textcircled{1} \times \textcircled{2} \text{을 하면 } L^2 = 2^6 \cdot 3^4 \quad \therefore L = 2^3 \cdot 3^2$$

이것을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $G = 2^2 = 4$

$m = aG, n = bG$ (a, b 는 서로소)라 하면

$$ab = \frac{L}{G} = 18 = 2 \times 3^2 \text{ 이고 } G < m < n < L \text{에서}$$

$a = 2, b = 3^2$ 이다.

$$\therefore m + n = aG + bG = G(a + b) = 2^2(2 + 9) = 44$$

33. 1보다 큰 양수 a, b, c 에 대하여 $a^x = b^{2y} = c^{3z} = 64$, $\log_2 abc = 12$ 가 성립할 때, $\frac{6}{x} + \frac{3}{y} + \frac{2}{z}$ 의 값은?

- ① 12 ② 13 ③ 14 ④ 15 ⑤ 16

해설

$$a^{64} \text{에서 } x = \log_a 64$$

$$\frac{1}{x} = \log_{64} a = \log_{2^6} a = \frac{1}{6} \log_2 a$$

$$b^{2y} = 64 \text{에서 } 2y = \log_b 64$$

$$\frac{1}{2y} = \log_{64} b = \log_{2^6} b = \frac{1}{6} \log_2 b$$

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{3} \log_2 b$$

$$c^{3z} = 64 \text{에서 } 3z = \log_c 64$$

$$\frac{1}{3z} = \log_{64} c = \log_{2^6} c = \frac{1}{6} \log_2 c$$

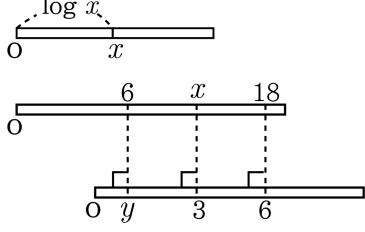
$$\frac{1}{z} = \frac{1}{2} \log_2 c$$

$$\therefore \frac{6}{x} + \frac{3}{y} + \frac{2}{z} = 6 \cdot \frac{1}{x} + 3 \cdot \frac{1}{y} + 2 \cdot \frac{1}{z}$$

$$= 6 \cdot \frac{1}{6} \log_2 a + 3 \cdot \frac{1}{3} \log_2 b + 2 \cdot \frac{1}{2} \log_2 c$$

$$= \log_2 a + \log_2 b + \log_2 c = \log_2 abc = 12$$

34. 아래쪽 그림과 같이 점 O를 시점으로 하여 거리가 $\log x (x > 1)$ 가 되는 곳의 눈금을 x 로 정한 자가 있다. 같은 종류의 두 개의 자의 눈금이 아래 그림과 같이 일치하였을 때, $x - 2y$ 의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

위의 그림과 같이 자 A에서 원점에서 거리가 6인 지점을 L, x 인 지점을 M, 18인 지점을 N, 자 B에서 원점에서 거리가 y 인 지점을 P, 3인 지점을 Q, 6인 지점을 R이라 하면

$$MN = QR \text{ 이므로 } \log 18 = \log x = \log 6 - \log 3 \text{ 에서 } \log \frac{18}{x} =$$

$$\log \frac{6}{3}$$

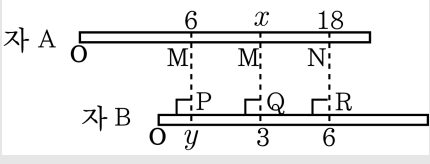
$$\therefore x = 9$$

$$LN = PR \text{ 이므로}$$

$$\log 18 - \log 6 = \log 6 - \log y \text{ 에서}$$

$$\log \frac{18}{6} = \log \frac{6}{y} \quad \therefore y = 2$$

$$\therefore x - 2y = 9 - 4 = 5$$



35. 세 자연수 x, y, z 가 $x \log_{200} 5 + y \log_{200} 2 = z$ 를 만족할 때, x, y, z 의
대소 관계를 바르게 나타낸 것은?

① $x < y < z$

② $x < z < y$

③ $y < x < z$

④ $z < x < y$

⑤ $z < y < x$

해설

$x \log_{200} 5 + y \log_{200} 2 = z$ 에서
 $\log_{200} 5^x + \log_{200} 2^y = z$
 $\log_{200} 5^x \cdot 2^y = z$
 $5^x \cdot 2^y = 200^z = (2^3 \cdot 5^2)^z = 2^{3z} \cdot 5^{2z}$
따라서 $x = 2z, y = 3z$ 이므로
 $x : y : z = 2z : 3z : z = 2 : 3 : 1$
 $\therefore z < x < y$

36. $A = 10^{\log_{10} 3}$, $B = \frac{1}{\log_{10} 3} + \frac{1}{\log_3 10}$, $C = \frac{3}{\log_{10} 3 + \log_3 10}$ 의 대소 관계를 바르게 나타낸 것은?

- ① $A < B < C$ ② $A < C < B$ ③ $B < A < C$
 ④ $C < A < B$ ⑤ $C < B < A$

해설

$$\begin{aligned} A &= 10^{\log_{10} 3} = 3 \\ B &= \frac{1}{\log_{10} 3} + \frac{1}{\log_3 10} \\ &= \frac{1}{\log_{10} 3} + \log_{10} 3 > 2 \sqrt{\frac{1}{\log_{10} 3} \cdot \log_{10} 3} = 2 \\ C &= \frac{3}{\log_{10} 3 + \log_3 10} \text{에서} \\ \log_{10} 3 + \log_3 10 &> 2 \sqrt{\log_{10} 3 \cdot \log_3 10} = 2 \text{이므로} \\ C &= \frac{3}{\log_{10} 3 + \log_3 10} < \frac{3}{2} \\ \therefore C &< B < A \end{aligned}$$

37. 제곱하면 6의 자리의 수가 되는 양의 정수를 a , 세제곱하면 7자리의 수가 되는 양의 정수를 b 라 할 때, $\frac{a}{b}$ 의 정수 부분의 자릿수는?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

a^2 이 6자리의 수이므로 $\log a^2$ 의 지표는 5이다.

$$5 \leq \log a^2 < 6, 5 \leq 2 \log a < 6$$

$$\therefore \frac{5}{2} \leq \log a < 3 \cdots \textcircled{1}$$

b^3 이 7자리의 수이므로 $\log b^3$ 의 지표는 6이다.

$$6 \leq \log b^3 < 7, 6 \leq 3 \log b < 7$$

$$\therefore 2 \leq \log b < \frac{7}{3} \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} - \textcircled{2}$ 을 하면

$$\frac{5}{2} - \frac{7}{3} \leq \log a - \log b < 3 - 2$$

$$\therefore \frac{1}{6} \leq \log \frac{a}{b} < 1$$

따라서 $\log \frac{a}{b}$ 의 지표는 0이므로 $\frac{a}{b}$ 의 정수 부분 자리 수는 1이다.

38. x, y 가 각각 2자리, 3자리의 자연수일 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고르면?

보기

- ㉠ xy 는 4자리 또는 5자리의 자연수이다.
- ㉡ $y = 10x$ 이면 $\log_{10} x$ 와 $\log_{10} y$ 의 소수 부분은 같다.
- ㉢ $\frac{1}{x}$ 은 소수 둘째 자리에서 처음으로 0이 아닌 수가 나타난다.

- ① ㉠

② ㉡

③ ㉠, ㉡

④ ㉡, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$\log_{10} x = 1 + \alpha (0 \leq \alpha < 1)$
 $\log_{10} y = 2 + \beta (0 \leq \beta < 1)$
㉠ $\log_{10} xy = \log_{10} x + \log_{10} y = 3 + \alpha + \beta$ 이고 여기에서 $0 \leq \alpha + \beta < 2$ 이므로 정수 부분은 3 또는 4이다.
 $\therefore xy$ 는 4자리 또는 5자리 자연수이다. (참)
㉡ $\log_{10} y = \log_{10} 10x = 1 + \log_{10} x = 2 + \alpha$ (참)
㉢ (반례) $x = 10$ 일때, $\frac{1}{10} = 0.1$ (거짓)

39. $x > 0$ 일 때, $\log x$ 의 정수 부분을 $f(x)$ 라 하자. 다음 두 조건을 만족하는 자연수 n 의 개수는?

- (가) $1 < n < 100$
(나) $f(2n) = 1 + f(n)$

- ① 40 ② 45 ③ 50 ④ 55 ⑤ 60

해설

(i) $1 < n < 10$ 일 때,
 $0 < \log n < 1$ 이므로 $f(n) = 0$
 $\therefore f(2n) = 1 + f(n) = 1 + 0 = 1$
 $1 \leq \log 2n < 2, \log 10 \leq \log 2n < \log 10^2$
 $10 \leq 2n < 100, 5 \leq n < 10$
따라서 자연수 n 의 개수는 $9 - 4 = 5(\text{개})$ 이다.

(ii) $10 \leq n < 100$ 일 때,
 $1 \leq \log n < 2$ 이므로 $f(n) = 1$
 $\therefore f(2n) = 1 + f(n) = 1 + 1 = 2$
 $2 \leq \log 2n < 3, \log 10^2 \leq \log 2n < \log 10^3$
 $100 \leq 2n < 1000, 50 \leq n < 500$
그런데 $10 \leq n < 100$ 이므로 $50 \leq n < 100$
따라서 자연수 n 의 개수는 $99 - 49 = 50(\text{개})$ 이다.

(i), (ii)에서 조건을 만족하는 자연수의 n 의 개수는 55개이다.

40. 다음 세 조건을 만족시키는 $\log a$, $\log b$, $\log c$ 를 세 변으로 하는 삼각형을 만들려고 한다. 이때, a , b , c 의 값은?

- ㉠ a , b , c 는 한 자리의 정수이다.

㉡ a , b , c 의 합은 16이다.

㉢ $\log b$ 의 소수 부분은 $\log a$ 의 소수 부분의 2배이다.

- ① $a = 3$, $b = 9$, $c = 4$

② $a = 2$, $b = 8$, $c = 6$

③ $a = 3$, $b = 8$, $c = 5$

④ $a = 3$, $b = 7$, $c = 6$

⑤ $a = 2$, $b = 6$, $c = 8$

해설

a , b , c 는 한 자리 정수이므로 $\log^a$, $\log^b$, $\log^c$ 의 정수 부분은 모두 0이다.

$\log^a = \alpha (0 < \alpha < 1)$
 $\log^b = \beta (0 < \beta < 1)$
 $\log^c = \gamma (0 < \gamma < 1)$ 라 하면

㉢에 의해 $\beta = 2\alpha$

$\therefore \log^b = 2\log^a = \log^{a^2}$
 $b = a^2$

(i) $a = 1$ 일 때 $b = 1$, $c = 14$
 c 는 두자리 정수이므로 모순

(ii) $a = 2$ 일 때 $b = 4$, $c = 10$
 c 는 두자리 정수이므로 모순

(iii) $a = 3$ 일 때 $b = 9$, $c = 4$

(iv) $a = 4$ 일 때 $b = 16$ 이므로 모순

$\vdots$
 $\therefore a = 3$, $b = 9$, $c = 4$

41. 상용로그의 정수 부분이 m 인 자연수 전체의 개수를 x , 역수의 상용로그의 정수 부분이 n 인 자연수 전체의 개수를 y 라 할 때, $\log x - \log y$ 를 m, n 으로 표시한 것은?

- ① $m - n$ ② $m - n + 1$ ③ $m - n + 2$
 ④ $m + n - 1$ ⑤ $m + n$

해설

정수 부분이 m 인 수를 X , 역수의 정수 부분이 n 인 수를 Y 라 하면
 (i) $m \leq \log X < m + 1$, $10^m \leq X < 10^{m+1}$
 $\therefore$ 자연수 X 의 개수는 $10^{m+1} - 10^m = 10^m(10 - 1) = 9 \cdot 10^m$ (개)
 (ii) $-n \leq \log \frac{1}{Y} < -n + 1$, $-n \leq -\log Y < -n + 1$, $n - 1 < \log Y \leq n$
 $10^{n-1} < Y \leq 10^n$
 $\therefore$ 자연수 Y 의 개수는 $10^n - 10^{n-1} = 10^{n-1}(10 - 1) = 9 \cdot 10^{n-1}$ (개)
 (i), (ii)에 의해 $\log x - \log y = \log \frac{x}{y} = \log \frac{9 \cdot 10^m}{9 \cdot 10^{n-1}} = \log 10^{m-n+1} = m - n + 1$

42. 상용로그의 정수 부분이 5인 자연수 전체의 개수를 x , 역수의 상용로그의 정수 부분이 4인 자연수 전체의 개수를 y 라 할 때, $\log x - \log y$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$5 \leq \log^n < 6$
 $10^5 \leq n < 10^6$ 이므로
 n 의 개수 $x = 10^6 - 10^5 = 9 \times 10^5$
 $-4 \leq \log \frac{1}{m} < -3$
 $-4 \leq -\log m < -3$
 $3 < \log m \leq 4$
 $10^3 < m \leq 10^4$
 m 의 개수 $y = 10^4 - 10^3 = 9 \times 10^3$
 $\log x - \log y = \log 9 \times 10^5 - \log 9 \times 10^3$
 $= 5 - 3 = 2$

43. 2^{2014} 이 n 자리의 정수라고 할 때, $\frac{1}{2^{2014}}$ 은 소수점 아래 몇 째 자리에서 처음으로 0이 아닌 수가 나오는가?

① n ② $n + 1$ ③ $n - 1$ ④ 2014 ⑤ 2015

해설

$\log 2^{2014}$ 의 가수는 0이 아니므로
 $\log 2^{2014} = n - 1 + \alpha (0 < \alpha < 1)$
 $\log 2^{\frac{1}{2^{2014}}} = \log 2^{-2014} = -2014 \log 2$
 $= -(n - 1 + \alpha)$
 $= -n + 1 - \alpha (\because 0 < 1 - \alpha < 1)$
 $\log 2^{\frac{1}{2^{2014}}}$ 의 지표는 $-n$, 가수는 $1 - \alpha$ 이므로
소수점 아래 n 번째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나온다.

44. $\log 2 = 0.3010, \log 3 = 0.4771$ 일 때, 2^{25} 의 최고 자리의 숫자를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$\log 2^{25}$ 의 가수를 이용하면 최고 자리의 숫자를 구할 수 있다.
 $\log 2^{25} = 25 \log 2 = 25 \times 0.3010 = 7.5250$ 이므로
 $\log 2^{25}$ 의 가수는 0.5250이다.
 $\log 2 = 0.3010, \log 3 = 0.4771, \log 4 = 2 \log 2 = 0.6020$ 이므로
 $\log 3 < 0.5250 < \log 4$
 $\therefore 7 + \log 3 < 7.5250 < 7 + \log 4$
 $\log(3 \times 10^7) < \log 2^{25} < \log(4 \times 10^7)$
따라서 $3 \times 10^7 < 2^{25} < 4 \times 10^7$ 이므로
 2^{25} 의 최고 자리의 숫자는 3이다.

45. 자연수 A 의 최고 자리의 숫자는 4이다. $\log A$ 의 소수 부분을 α 라 할 때, 다음 중 옳은 것은? (단, $\log 2 = 0.3010$, $\log 3 = 0.4771$)

① $0 \leq \alpha < 0.3010$

② $0.3010 \leq \alpha < 0.4771$

③ $0.4771 \leq \alpha < 0.6020$

④ $0.6020 \leq \alpha < 0.6990$

⑤ $0.6990 \leq \alpha < 0.7781$

해설

A 의 최고 자리의 숫자가 4이므로

$4 \times 10^n \leq A < 5 \times 10^n$ (n 은 자연수)라 하면

$n + \log 4 \leq \log A < n + \log 5$

$\log 4 = 2\log 2 = 0.6020$, $\log 5 = 1 - \log 2 = 0.6990$ 이므로

$n + 0.6020 \leq \log A < n + 0.6990$

$\therefore 0.6020 \leq \alpha < 0.6990$

46. 3^{37} 은 m 자리의 자연수이고, 최고 자리의 숫자는 n 이다. 이때, $m+n$ 의 값은?

① 19

② 80

③ 21

④ 22

⑤ 23

해설

$\log 3^{37} = 37 \log 3 = 37 \times 0.4771 = 17.6527$
 $\log 3^{37}$ 의 지표가 17이므로 3^{37} 은 18자리의 수이다.
 $\therefore m = 18$
 $\log 3^{37}$ 의 가수가 0.6527이고
 $\log 4 = 2 \log 2 = 0.6020$,
 $\log 5 = 1 - \log 2 = 0.6990$ 이므로
 $\log 4 < 0.6527 < \log 5$
 $17 + \log 4 < 17.6527 < 17 + \log 5$
 $\log(4 \times 10^{17}) < \log 3^{37} < \log(5 \times 10^{17})$
따라서 $4 \times 10^{17} < 3^{37} < 5 \times 10^{17}$ 이므로
 3^{37} 의 최고 자리의 숫자는 4이다.
 $\therefore n = 4$
 $\therefore m+n = 18+4 = 22$

47. $\log x$ 의 소수 부분과 $\log x^2$ 의 소수 부분이 서로 같은 x 의 값은 몇 개 존재하는가?

- ① 2개 ② 3개 ③ 4개 ④ 5개 ⑤ 6개

해설

$$\log x = n + \alpha \quad (0 \leq \alpha < 1)$$

$$2 \log x = 2n + 2\alpha$$

$$0 \leq 2\alpha < 2$$

(i) $0 \leq 2\alpha < 1$ 일 때

$$\alpha = 2\alpha \quad \therefore \alpha = 0$$

$$\log x = n$$

$$x = 10^n$$

$$10 \leq 10^n < 1000$$

$$n = 1 \text{ or } 2$$

$\therefore x$ 는 2개

(ii) $1 \leq 2\alpha < 2$ 일 때

$$\alpha = 2\alpha - 1$$

$$1 = \alpha$$

그런데 $0 \leq \alpha < 1$ 이므로 모순

$\therefore x$ 는 2개

48. $\frac{3^{10}}{2^{30}} = k \cdot 10^n$ (n 은 정수, $1 \leq k < 10$) 일 때, $n + [k]$ 의 값은? (단, $\log 2 = 0.3010$, $\log 3 = 0.4771$ 이고 $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

- ① -3
- ② -1
- ③ 0
- ④ 3
- ⑤ 5

해설

$$\begin{aligned}\log \frac{3^{10}}{2^{30}} &= 10 \log 3 - 30 \log 2 \\ &= -4.259 \\ &= -5 + 0.741 \\ \log k \cdot 10^n &= n + \log k \\ 0 \leq \log k < 1 \text{ 이므로} \\ n = -5, \log k &= 0.741 \\ \log 5 = \log \frac{10}{2} &= 1 - \log 2 = 0.6990, \\ \log 6 = \log 2 + \log 3 &= 0.7781 \text{ 이므로} \\ \log 5 < \log k < \log 6 \quad \therefore k &= 5. \times \times \times \\ \therefore n + [k] &= -5 + 5 = 0\end{aligned}$$

49. 실수 a 에 대하여 $[a]$ 는 a 보다 크지 않은 최대 정수를 나타낸다. 다음 조건을 동시에 만족하는 모든 실수 x 의 값의 곱을 M 이라 할 때, $\log_{10} M^4$ 의 값을 구하여라.

$$\textcircled{\text{㉠}} \quad [\log_{10} x] = 1$$
$$\textcircled{\text{㉡}} \quad \log_{10} x - \log_{10} \frac{1}{x^3} = [\log_{10} x] - \left[\log_{10} \frac{1}{x^3} \right]$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 22

해설

조건 ㉠에서 $[\log_{10} x] = 1$ 이므로 $\log_{10} x$ 의 지표는 1이다.

$$\therefore 1 \leq \log_{10} x < 2$$

조건 ㉡에서 $\log_{10} x - [\log_{10} x] = \log_{10} \frac{1}{x^3} - \left[\log_{10} \frac{1}{x^3} \right]$ 이므로

$\log_{10} x$ 와 $\log_{10} \frac{1}{x^3}$ 의 가수가 같다

$$\text{즉, } \log_{10} x + 3 \log_{10} x = (\text{정수})$$

$$\therefore 4 \log_{10} x = (\text{정수})$$

$$\textcircled{\text{㉠}}\text{에서 } 4 \leq 4 \log_{10} x < 8$$

$$4 \log_{10} x = 1, \frac{5}{4}, \frac{6}{4}, \frac{7}{4}$$

$$\therefore x = 10, 10^{\frac{5}{4}}, 10^{\frac{6}{4}}, 10^{\frac{7}{4}}$$

따라서, x 의 값을 모두 곱하면

$$M = 10^{1+\frac{5}{4}+\frac{6}{4}+\frac{7}{4}} = 10^{\frac{14}{2}}$$

$$\therefore \log_{10} M^4 = 22$$

50. 다음 두 조건을 만족하는 서로 다른 세 자연수 A, B, C 에 대하여 $A + B + C$ 의 최댓값은?(단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대 정수)

보기

- (가) $[\log A] + [\log B] + [\log C] = 0$
(나) $\log A, \log B, \log C$ 가 이순서대로 등차수열을 이룬다.

- ① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

해설

A, B, C 가 자연수이면 $[\log A] + [\log B] + [\log C] = 0$ 을 만족하는 A, B, C 는 모두 한자리 자연수
 $2\log B = \log A + \log C$ 에서 $B^2 = AC$
등비수열을 이루는 한 자리 자연수들은 1, 2, 4와 1, 3, 9과 2, 4, 8이다.
그 중 합이 최대인 것은 2, 4, 8이므로 이들의 합은 14

51. 서로 다른 세 실수 a, b, c 가 이 순서로 등비수열을 이룰 때, 보기 중 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, a, b, c 는 1이 아닌 양수이다.)

보기

- ㉠ $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ 은 이 순서로 등비수열을 이룬다.
㉡ $\log a, \log b, \log c$ 는 이 순서로 등차수열을 이룬다.
㉢ $\log_a 2, \log_b 2, \log_c 2$ 는 이 순서로 등차수열을 이룬다.

- ① ㉠ ② ㉡ ③ ㉠, ㉡
④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

a, b, c 가 이 순서로 등비수열을 이루므로 $b^2 = ac$

㉠ (참)

$$\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{c} = \frac{1}{ac} = \frac{1}{b^2} = \left(\frac{1}{b}\right)^2$$

따라서, $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ 은 이 순서로 등비수열을 이룬다.

㉡ (참)

$$\log a + \log c = \log ac = \log b^2 = 2\log b$$

따라서, $\log a, \log b, \log c$ 는 이 순서로 등차수열을 이룬다.

㉢ (거짓)

(반례) $a = 2, b = 4, c = 8$

$$\log_2 2 = 1, \log_4 2 = \frac{1}{2}, \log_8 2 = \frac{1}{3}$$

$b^2 = ac$ 이지만 $2\log_b 2 \neq \log_a 2 + \log_c 2$

52. 함수 $f(x) = x + \log_{10} x$ 에 대하여
 $\sum_{n=1}^{99} [f(n)] - \sum_{n=2}^{100} [f(n)]$ 의 값은?

① -106 ② -107 ③ -108 ④ -109 ⑤ -110

해설

$f(x) = x + \log_{10} x$ 이므로
 $\sum_{n=1}^{99} [f(n)] - \sum_{n=2}^{100} [f(n)] = [f(1)] + [f(2)] + \cdots + [f(99)] -$
 $\{[f(2)] + [f(3)] + \cdots + [f(100)]\}$
 $= [1 + \log_{10} 1] - [100 + \log_{10} 100] = -110 + 1 = -109$

53. 다음은 $\log_m n$ 이 무리수임을 이용하여 $\log_{m^2} m^3 n$ 도 무리수임을 증명한 것이다.

$\log_m n = s$ (s 는 [(가)])로 놓고
 $\log_{m^2} m^3 n$ 이 유리수라고 하자.
 $\log_{m^2} m^3 n = \frac{\log_m m^3 n}{\log_m m^2} = \frac{1}{2}[(나)]$
이때, $\log_{m^2} m^3 n = t$ (t 는 유리수)라 하면
 $2t - 3 = s$
이것은 [(다)]가 되어 모순이다.
따라서, $\log_{m^2} m^3 n$ 은 무리수이다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

- ① 유리수, $2s$, (유리수)=(무리수)

② 유리수, $1 + 2s$, (짝수)=(홀수)

③ 유리수, $2 + s$, (유리수)=(무리수)

④ 무리수, $2s$, (짝수)=(홀수)

⑤ 무리수, $3 + s$, (유리수)=(무리수)

해설

$\log_m n = s$ (s 는 [무리수])로 놓고
 $\log_{m^2} m^3 n$ 이 유리수라고 하자.
 $\log_{m^2} m^3 n = \frac{\log_m m^3 n}{\log_m m^2} = \frac{1}{2}[(3 + s)]$
이때, $\log_{m^2} m^3 n = t$ (t 는 유리수)라 하면
 $2t - 3 = s$
이것은 [(유리수)=(무리수)]가 되어 모순이다.
따라서, $\log_{m^2} m^3 n$ 은 무리수이다.

54. 자연수 x, y 가 $\log_3 x + \log_9 y^2 = \log_3(2x + y + 2)$ 를 만족시킬 때, $2x + y$ 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

$$xy = 2x + y + 2, \quad xy - 2x - y + 2 = 4$$

$(x-1)(y-2) = 4$, x, y 는 자연수이므로

$$\begin{cases} x-1=1 \\ y-2=4 \end{cases}, \quad \begin{cases} x-1=2 \\ y-2=2 \end{cases}, \quad \begin{cases} x-1=4 \\ y-2=1 \end{cases}$$

$x=5, y=3$ 일 때, $2x+y$ 의 최댓값은 13이다.

55. 다음을 만족하는 두 자연수 m, n 의 곱 mn 의 값을 구하면?

$$\log\left(1+\frac{1}{m}\right)+\log\left(1+\frac{1}{m+1}\right)+\log\left(1+\frac{1}{m+2}\right)+\cdots+\log\left(1+\frac{1}{m+n}\right)=\log n$$

- ① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$$\log\left(1+\frac{1}{m}\right)=\log\frac{m+1}{m}$$

$$\log\left(1+\frac{1}{m+1}\right)=\log\frac{m+2}{m+1}$$

⋮

$$\log\left(1+\frac{1}{m+n}\right)=\log\frac{m+n+1}{m+n}$$

따라서, 주어진 식의 좌변은

$$\begin{aligned}(\text{좌변})&=\log\left(\frac{m+1}{m}\times\frac{m+2}{m+1}\times\cdots\times\frac{m+n+1}{m+n}\right)\\&=\log\frac{m+n+1}{m}\end{aligned}$$

$$\text{즉, }\log\frac{m+n+1}{m}=\log n\text{에서}$$

$$\frac{m+n+1}{m}=n$$

$$mn-m-n=1,(m-1)(n-1)=2$$

m, n 이 자연수이므로 $m-1=2, n-1=1$ 또는 $m-1=1, n-1=2$

$$\therefore m=3, n=2 \text{ 또는 } m=2, n=3$$

$$\therefore mn=6$$

56. 두 실수 x, y 가 등식 $25^x = 3^y = 64$ 를 만족할 때, 다음 중 $x, y, \frac{y}{x}$ 의 대소관계를 옳게 나타낸 것은?

- ① $x < y < \frac{y}{x}$ ② $x < \frac{y}{x} < y$ ③ $\frac{x}{y} < x < y$
 ④ $y < \frac{y}{x} < x$ ⑤ $y < x < \frac{y}{x}$

해설

$25^x = 64$ 에서
 $x = \log_{25} 64 = \log_{5^2} 2^6 = 3 \log_5 2 = \frac{3}{\log_2 5}$ 이고,
 $\frac{3}{\log_2 8} < \frac{3}{\log_2 5} < \frac{3}{\log_2 4}$ 이므로
 $1 < x < \frac{3}{2} \cdots \textcircled{㉠}$
 $3^y = 64$ 에서
 $y = \log_3 64 = \log_3 2^6 = 6 \log_3 2 = \frac{6}{\log_2 3}$ 이고
 $\frac{6}{\log_2 4} < \frac{6}{\log_2 3} < \frac{6}{\log_2 2}$ 이므로
 $3 < y < 6 \cdots \textcircled{㉡}$
 $\frac{y}{x} = \frac{\frac{6}{\log_2 3}}{\frac{3}{\log_2 5}} = 2 \times \frac{\log_2 5}{\log_2 3} > 2 (\because \log_2 3 < \log_2 5) \cdots \textcircled{㉢}$
 $\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}, \textcircled{㉢}$ 에 의하여
 $\frac{y}{x} - y = \frac{y(1-x)}{x} < 0, \quad \frac{y}{x} - x = \frac{y-x}{x} > 0$
 $\therefore x < \frac{y}{x} < y$

57. 자연수 n 에 대하여 $\log n$ 의 정수 부분과 소수 부분을 각각 $f(n), g(n)$ 이라 할 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

- ㉠ $f(n) = g(n)$ 이기 위한 필요충분조건은 $n = 1$ 이다.
㉡ $10^{f(50)} \times 10^{g(50)} = 50$
㉢ $f(10n)g(10n) = f(n)g(n) + g(n)$

- ① ㉠ ② ㉡ ③ ㉠, ㉡
④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ (참)
(i) $f(n) = g(n)$ 인 경우는 $f(n) = g(n) = 0$ 인 경우이다.
 $\log n = f(n) + g(n)$ 이므로 $\log n = 0, n = 1$ 이다.
(ii) $n = 1$ 이면 $\log 1 = 0$ 이므로 $f(1) = g(1) = 0$
(i), (ii)에서 필요충분조건이 성립한다.
㉡ (참)
 $\log 50 = 1 + \log 5 \therefore f(50) = 1, g(50) = \log 5$
 $10^{f(50)} \times 10^{g(50)} = 10^1 \times 10^{\log 5} = 10 \times 5 = 50$
㉢ (참)
 $\log 10n = 1 + \log n = 1 + f(n) + g(n)$
 $\therefore f(10n) = 1 + f(n), g(10n) = g(n)$
 $\therefore f(10n)g(10n) = \{1 + f(n)\} \cdot g(n) = f(n)g(n) + g(n)$

58. 무게가 $3^{100}g$ 인 물체가 있다. 이 물체의 무게를 $1g, 5g, 5^2g, 5^3g, \dots$ 등의 추를 사용하여 측정하려고 한다. 사용되는 추의 개수를 최소로 할 때, 가장 무거운 추는 몇 g 이어야 하는가? (단, $\log 2 = 0.3010$, $\log 3 = 0.4771$)

① $5^{66}g$ ② $5^{67}g$ ③ $5^{68}g$ ④ $5^{69}g$ ⑤ $5^{70}g$

해설

$$\log 3^{100} = 100 \times \log 3 = 47.71$$

$$\log 5^n = n \log 5 = n(1 - \log 2)$$

$$= n(1 - 0.3010) = n$$

$$5^n < 3^{100}$$

$$n(1 - \log 2) < 100 \log 3$$

$$0.699n < 47.71$$

$$n < \frac{47.71}{0.699} \div 68.25$$

최대인 n 의 값은 68

$$\therefore 5^{68}g$$

59. 1보다 큰 자연수 n 에 대하여 n 의 모든 양의 약수를 $n_1, n_2, n_3, \dots, n_k$ 라 할 때,
 $f(n) = \log_n n_1 + \log_n n_2 + \log_n n_3 + \dots + \log_n n_k$ 라고 정의 하자. 다음 <보기> 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

- ㉠ $f(12) = 3$
- ㉡ $f(2n) = 2f(n)$
- ㉢ 모든 자연수 n 에 대하여 $f(n)$ 은 정수이다.

- ① ㉠

② ㉡

③ ㉠, ㉡
- ④ ㉠, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$f(n) = \log_n n_1 + \log_n n_2 + \log_n n_3 + \dots + \log_n n_k$ 이때, n 의 모
 $= \log_n (n_1 \times n_2 \times n_3 \times \dots \times n_k)$

든 양의 약수를 $n_1, n_2, n_3, \dots, n_k$ 라 하므로

$n = n_1 \times n_k = n_2 \times n_{k-1} = \dots$

$n_1 \times n_2 \times n_3 \times \dots \times n_k = n^{\frac{k}{2}}$

$\therefore f(n) = \log_n (n_1 \times n_2 \times n_3 \times \dots \times n_k) = \frac{k}{2}$

$f(n)$ 은 n 의 양의 약수의 개수를 2로 나눈 수이다.

이제 ㉠ ~ ㉢의 참, 거짓을 따져 보자.

㉠ $12 = 2^2 \times 3$ 의 양의 약수는 6개 이므로

$\therefore f(12) = 3 \therefore$ 참

㉡ $6 = 2 \times 3$ 의 양의 약수는 4개이므로 $f(6) = 2$

$\therefore f(12) \neq 2f(6)$

㉢ n 이 완전제곱수일 때 약수의 개수는 홀수 개이므로

$f(n)$ 은 정수가 아니다.

따라서 옳은 것은 ㉠뿐이다.

60. $\frac{2002!}{(1001!)^2}$ 의 끝자리에 오는 0의 개수를 구하면?

- ① 0 ② 1 ③ 2 ④ 200 ⑤ 400

해설

$n!$ 의 끝자리에 오는 0의 개수는 $n!$ 의 약수에서 10의 거듭제곱의 최대 지수와 같다. 또한 $n!$ 로 나눌 때, 5의 거듭제곱의 최대 지수이다.

일반적으로 $n!$ 의 소인수분해에서 소인수 p 의 거듭제곱의 최대 지수는

$$\left[\frac{n}{p} \right] + \left[\frac{n}{p^2} \right] + \left[\frac{n}{p^3} \right] + \cdots \text{이다.}$$

그러므로 $\frac{2002!}{(1001!)^2}$ 의 약수에서

5의 거듭제곱의 최대 지수는

$$\begin{aligned} & \left[\frac{2002}{5} \right] + \left[\frac{2002}{5^2} \right] + \left[\frac{2002}{5^3} \right] + \left[\frac{2002}{5^4} \right] \\ & - 2 \left(\left[\frac{1001}{5} \right] + \left[\frac{1001}{5^2} \right] + \left[\frac{1001}{5^3} \right] + \left[\frac{1001}{5^4} \right] \right) \\ & = (400 + 80 + 16 + 3) - 2(200 + 40 + 8 + 1) = 1 \end{aligned}$$

61. 20개의 양수 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{20}$ 은 다음 두 조건을 만족시킨다.

(가) $a_1 a_{20} = 8$

(나) $\frac{\log_2 a_n + \log_2 a_{n+2}}{2} = \log_2 a_{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots, 18)$

20개의 양수 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{20}$ 을 모두 곱한 값을 P 라 할 때, $\log_2 P$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 30

해설

$$\frac{\log_2 a_n + \log_2 a_{n+2}}{2} = \log_2 a_{n+1} \text{ 이므로}$$

$$\log_2 a_n a_{n+2} = 2 \log_2 a_{n+1} = \log_2 a_{n+1}^2$$

$$\therefore a_n a_{n+2} = a_{n+1}^2$$

따라서, $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{20}$ 은 이 순서대로 등비수열을 이룬다.

이때, 첫째항을 a , 공비를 r 이라 하면

$$a_1 a_{20} = a \cdot ar^{19} = a^2 r^{19} = 8$$

$$P = a \cdot ar \cdot ar^2 \cdots ar^{19} = a^{20} r^{1+2+3+\cdots+19}$$

$$= a^{20} r^{190} = (a^2 r^{19})^{10} = 8^{10} = (2^3)^{10} = 2^{30}$$

$$\therefore \log_2 P = \log_2 2^{30} = 30$$